

Examen de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

1. [1 punto] Calcular, haciendo uso de la definición, la derivada de la función $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x}$ en el punto $x = -1$.

2. [1 punto] Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ en el punto $x = 1$.

Ayuda. Recuerda que el logaritmo de uno es igual a cero: $\ln 1 = 0$.

3. [3 puntos, 1 punto por apartado] Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo que puedas el resultado.

a) $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{-x^2 + x}$

b) $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$

c) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - x}$

Nota. En la simplificación no es necesario desarrollar las potencias que puedan aparecer en el denominador.

4. Dada la función $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8}$, contesta de manera razonada a los siguientes apartados:

a) [1 punto] Calcular el dominio de la función, así como los puntos de corte con los ejes.

b) [1 punto] Hallar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

c) [2 puntos] Halla, de manera razonada, el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la función. Los máximos y mínimos los debes de dar con ambas coordenadas.

d) [1 punto] Usando los datos anteriores, representa gráficamente la función.

Soluciones

1. [1 punto] Calcular, **haciendo uso de la definición**, la derivada de la función $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-2x}$ en el punto $x = -1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2x-1}{x^2-2x} - \frac{-3}{3}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2x-1}{x^2-2x} + 1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{2x-1}{x^2-2x} + \frac{x^2-2x}{x^2-2x}}{x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{x^2-1}{x^2-2x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{(x+1)(x^2-2x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(x^2-2x)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{-2}{3}. \text{ Por tanto, } f'(-1) = -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

2. [1 punto] Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ en el punto $x = 1$.

En primer lugar, hagamos la derivada de la función: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Entonces, la derivada en $x = 1$ es $f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1} = \frac{1 - 0}{1} = 1$. Además, la imagen en $x = 1$ es $f(1) = \frac{\ln 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1.$$

3. [3 puntos, 1 punto por apartado] Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo que puedas el resultado.

$$\begin{aligned}\text{a) } f(x) &= \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{-x^2 + x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(6x^2 - 6x)(-x^2 + x) - (2x^3 - 3x^2 - 1)(-2x + 1)}{(-x^2 + x)^2} = \\ &= \frac{-6x^4 + 6x^3 + 6x^3 - 6x^2 + 4x^4 - 2x^3 - 6x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{(-x^2 + x)^2} = \frac{-2x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1}{(-x^2 + x)^2}.\end{aligned}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot x^2 - e^{2x} \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^2 e^{2x} - 2x e^{2x}}{x^4} = \frac{2x e^{2x}(x - 1)}{x^4} = \frac{2e^{2x}(x - 1)}{x^3}.$$

$$\text{c) } f(x) = \ln \sqrt{x^2 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x}} \cdot (2x - 1) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}^2} = \frac{2x - 1}{2(x^2 - x)} = \frac{2x - 1}{2x(x - 1)}.$$

4. Dada la función $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8}$, contesta de manera razonada a los siguientes apartados:

- a) [1 punto] Calcular el dominio de la función, así como los puntos de corte con los ejes.

Las soluciones de $x^2 - 2x - 8 = 0$ son $x = -2$ y $x = 4$. Entonces $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$.

Si $x = 0$, entonces claramente $y = 0$. Y si $y = 0$, $\frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = 0 \Rightarrow -2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Por tanto, el único punto de corte con los ejes es el origen de coordenadas: $(0, 0)$.

b) [1 punto] Hallar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Se tiene que $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$ y $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 4^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 4^+ \end{cases}$, por lo que $x = -2$

y $x = 4$ son asíntotas verticales.

Además, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = -2$, por lo que $y = -2$ es una asíntota horizontal.

Y como la función tiene una asíntota horizontal, entonces no tiene asíntotas oblicuas.

c) [2 puntos] Halla, de manera razonada, el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la función. Los máximos y mínimos los debes de dar con ambas coordenadas.

$$f'(x) = \frac{-4x(x^2 - 2x - 8) - (-2x^2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-4x^3 + 8x^2 + 32x + 4x^3 - 4x^2}{(x^2 - 2x - 8)^2} =$$

$$= \frac{4x^2 + 32x}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{4x(x + 8)}{(x^2 - 2x - 8)^2}. \text{ Entonces } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x + 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -8$$

Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos haciendo uso de una tabla orientativa:

	$(-\infty, -8)$	$(-8, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo de f'	+	-	-	+	+
Monotonía	↑↑	↓↓	↓↓	↑↑	↑↑

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty, -8) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(-8, -2) \cup (-2, 0)$.
- f tiene un máximo relativo en $x = -8$; concretamente el máximo relativo es $\left(-8, -\frac{16}{9}\right) = (-8, -1,78)$.
- f tiene un mínimo relativo en $x = 0$; en concreto el mínimo relativo es $(0, 0)$.

d) [1 punto] Usando los datos anteriores, representa gráficamente la función.

