

Examen de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I

1. **[1 punto]** Calcular, haciendo uso de la definición, la derivada de la función $f(x) = \frac{x+9}{2x^2-6}$ en el punto $x=3$.
2. **[1 punto]** Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ en el punto $x=4$.
3. **[3 puntos, 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo que puedas el resultado.

a) $f(x) = \frac{x^3 - 12x + 2}{x^2 - 7}$

b) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$

c) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$

Nota. En la simplificación no es necesario desarrollar las potencias que puedan aparecer en el denominador.

4. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2}$, contesta de manera razonada a los siguientes apartados:
 - a) **[1 punto]** Calcular el dominio de la función, así como los puntos de corte con los ejes.
 - b) **[1 punto]** Hallar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
 - c) **[2 puntos]** Halla, de manera razonada, el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la función. Los máximos y mínimos los debes de dar con ambas coordenadas.
 - d) **[1 punto]** Usando los datos anteriores, representa gráficamente la función.

Soluciones

1. [1 punto] Calcular, **haciendo uso de la definición**, la derivada de la función $f(x) = \frac{x+9}{2x^2-6}$ en el punto $x=3$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x+9}{2x^2-6} - \frac{12}{2 \cdot 3^2 - 6}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x+9}{2x^2-6} - 1}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x+9}{2x^2-6} - \frac{2x^2-6}{2x^2-6}}{x - 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{-2x^2 + x + 15}{2x^2-6}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x^2 + x + 15}{(x-3)(2x^2-6)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(-2x-5)}{\cancel{(x-3)}(2x^2-6)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x-5}{2x^2-6} = \frac{-11}{12} \Rightarrow f'(3) = -\frac{11}{12}.\end{aligned}$$

2. [1 punto] Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ en el punto $x=4$.

En primer lugar, hagamos la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2x - x - 1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}.$$

Entonces, la derivada en $x=4$ es $f'(4) = \frac{4-1}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{4}} = \frac{3}{16}$. Además, la imagen en $x=4$ es $f(4) = \frac{4+1}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en $x=4$ es:

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = \frac{3}{16}(x - 4).$$

3. [3 puntos, 1 punto por apartado] Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo que puedas el resultado.

$$\begin{aligned}\text{a) } f(x) &= \frac{x^3 - 12x + 2}{x^2 - 7} \Rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2 - 12)(x^2 - 7) - (x^3 - 12x + 2)2x}{(x^2 - 7)^2} = \\ &= \frac{3x^4 - 21x^2 - 12x^2 + 84 - 2x^4 + 24x^2 - 4x}{(x^2 - 7)^2} = \frac{x^4 - 9x^2 - 4x + 84}{(x^2 - 7)^2}.\end{aligned}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{\ln x}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\frac{e^x - x e^x \ln x}{x}}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1 - x \ln x)}{x(e^x)^2} = \frac{1 - x \ln x}{x e^x}.$$

$$\begin{aligned}\text{c) } f(x) &= \frac{2x}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2\sqrt{x-1} - 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}^2} = \frac{2\sqrt{x-1} - \frac{x}{\sqrt{x-1}}}{x-1} = \frac{\frac{2(x-1) - x}{\sqrt{x-1}}}{x-1} = \\ &= \frac{2x - 2 - x}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{x-2}{(x-1)\sqrt{x-1}}.\end{aligned}$$

4. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2}$, contesta de manera razonada a los siguientes apartados:

- a) [1 punto] Calcular el dominio de la función, así como los puntos de corte con los ejes.

Claramente, el denominador se anula cuando $x=0$. Entonces $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$.

Si $x=0$, no existe la imagen de f , porque $0 \notin \text{Dom } f$. Entonces, la función no corta al eje Y .

Y si $y=0$, $\frac{x^2-2x-3}{x^2}=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$, cuyas soluciones son $x=-1$ y $x=3$. Por tanto, los puntos de corte con el eje X son $(-1,0)$ y $(3,0)$.

b) [1 punto] Hallar las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Se tiene que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2x-3}{x^2} = \left[\frac{-3}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \\ \infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \end{cases}$. Por tanto, $x=0$ (el eje Y) es una asíntota vertical.

Además, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^2} = 1$, por lo que $y=1$ es una asíntota horizontal.

Y como la función tiene una asíntota horizontal, entonces no tiene asíntotas oblicuas.

c) [2 puntos] Halla, de manera razonada, el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de la función. Los máximos y mínimos los debes de dar con ambas coordenadas.

$$f'(x) = \frac{(2x-2)x^2 - (x^2-2x-3)2x}{(x^2)^2} = \frac{2x^3-2x^2-2x^3+4x^2+6x}{x^4} = \frac{2x^2+6x}{x^4} = \frac{2x+6}{x^3}$$

Entonces $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+6=0 \Leftrightarrow x=-3$

Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos haciendo uso de una tabla orientativa:

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de f'	+	-	+
Monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(-3, 0)$.
- f tiene un máximo relativo en $x=-3$; concretamente el máximo relativo es $\left(-3, \frac{4}{3}\right) = (-3; 1,33)$.

d) [1 punto] Usando los datos anteriores, representa gráficamente la función.

