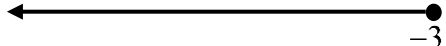
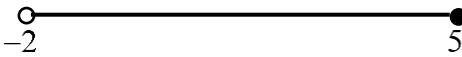


1. A) Expresa de forma analítica los siguientes intervalos de números reales y represéntalos:
 a₁) Números reales menores o iguales que -3 ; a₂) Números reales mayores que -2 y menores o iguales que 5 .
- B) Efectúa las siguientes operaciones con raíces y simplifica: b₁) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$; b₂) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$.
2. La caja registradora de una tienda de ropa tiene 21 billetes repartidos en billetes de 50 €, 100 € y 200 €. Además, sabemos que la caja contiene 1800 € y que el número de billetes de 50 € es el quíntuple de los de 200 €.
 a) Planeta un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos billetes de cada tipo hay en la caja.
 b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior por el método de Gauss.
3. Halla el dominio de: a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, b) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-7x}$, c) $f(x) = \log(x+1)$, d) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+9}$.
4. Representa gráficamente la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ indicando dominio, recorrido, cortes con los ejes y monotonía.
5. El consumo de gasolina de un coche, por cada 100 km recorridos, depende de su velocidad. A 60 km/h consume 5,7 litros y a 90 km/h consume 7,2 litros. Usando interpolación lineal:
 a) Obtén la expresión analítica de la función que relaciona la velocidad con el consumo.
 b) Estima el consumo si el coche recorre 100 km a 80 km/h.
6. Obtén la función inversa de las siguientes funciones: a) $f(x) = 3x - 2$, b) $g(x) = \sqrt{x-1}$.
7. Calcula y representa gráficamente las asíntotas de las siguientes funciones: a) $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$, b) $g(x) = \frac{3x^2}{x+2}$.
8. Estudia la continuidad de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.
9. A) Calcula la tasa de variación media (TVM) de las siguientes funciones y explica el significado del valor que obtienes: a₁) $f(x) = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo $[-1, 0]$, a₂) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ en el intervalo $[-1, 0]$.
 B) Obtén la función derivada de las siguientes funciones usando las reglas de derivación:
 b₁) $f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 1)$, b₂) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.
10. La siguiente tabla muestra las notas de Matemáticas y las notas de Lengua de una clase de 1º de Bachillerato.
- | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Notas de Matemáticas (x) | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Notas de Lengua (y) | 5 | 8 | 7 | 6 | 9 | 4 | 5 | 2 | 3 | 1 |
- a) Representa la nube de puntos y deduce el signo de r .
 b) Calcula $\bar{x}$ e $\bar{y}$.
 c) Sabiendo que $\sigma_x = 2,47$; $\sigma_y = 2,45$; $\sigma_{xy} = -4,6$, calcula el coeficiente de correlación.
 d) ¿Qué puedes decir de la relación entre las variables?
 e) Calcula la recta de regresión de y sobre x .
 f) Estima la nota de Lengua de un alumno que tiene un 4,5 en Matemáticas.

Nota: todos los ejercicios puntúan igual.

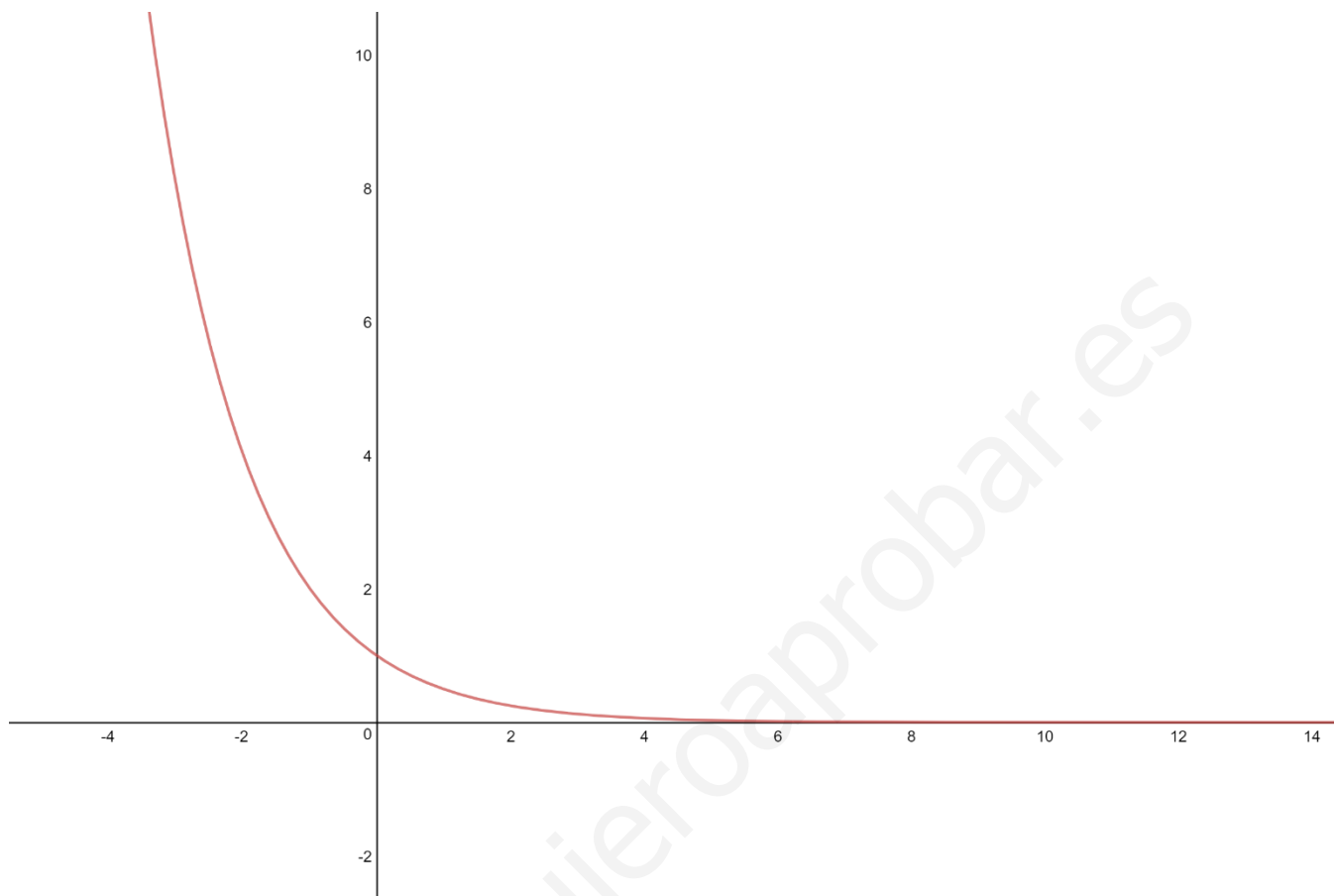
Soluciones

1. a₁) Forma analítica: $(-\infty, -3]$. Representación gráfica: 
- a₂) Forma analítica: $(-2, 5]$. Representación gráfica: 
- b₁) $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (3+5-1-2)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
- b₂) $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}-\sqrt{4}}{3 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{6}-2}{3 \cdot 2} = \frac{2(\sqrt{6}-1)}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}-1}{3}$
2. Llamemos x al número de billetes de 50 €, y al número de billetes de 100 € y z al número de billetes de 200 €.
- Entonces podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ 50x + 100y + 200z = 1800 \\ x = 5z \end{cases}$$
 Si dividimos la
- segunda ecuación entre 50 obtenemos el siguiente sistema equivalente:
$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ x + 2y + 4z = 36 \\ x - 5z = 0 \end{cases}$$
- Lo resolveremos por el método de Gauss:
- $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21 \\ 1 & 2 & 4 & 36 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1, f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & -1 & -6 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 1 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$
- El sistema escalonado asociado a la última matriz es
$$\begin{cases} x + y + z = 21 \\ y + 3z = 36 \\ -3z = -6 \end{cases}$$
 cuyas soluciones son $z = 2$, $y = 9$, $x = 10$
- Por tanto, hay 10 billetes de 50 €, 9 billetes de 100 € y 2 billetes de 200 €.
3. a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$. Esta función solamente tiene sentido cuando $x^2 - 4 \geq 0$. Las raíces de $x^2 - 4$ son $x = -2$ y $x = 2$. Entonces la inequación es equivalente a esta otra $(x+2)(x-2) \geq 0$. Las raíces dividen a la recta real en tres intervalos. En cada uno de ellos se puede estudiar el signo del producto $(x+2)(x-2)$. Haremos una tabla:
- | | | |
|-----------------|-----------|----------------|
| $(-\infty, -2)$ | $(-2, 2)$ | $(2, +\infty)$ |
| + | - | + |
- Como lo que nos interesan son las partes positivas, la solución de la inequación es: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
- Por tanto: $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.
- b) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-7x}$. Como $x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(7-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$, entonces $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 7\}$.
- c) $f(x) = \log(x+1)$. El logaritmo de un número sólo tiene sentido si este número es mayor que cero. Entonces ha de ser $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Por tanto: $\text{Dom } f = (-1, +\infty)$.
- d) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+9}$. Como $x^2 + 9 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces tiene sentido hacer la imagen de esta función para cualquier número real. Es decir: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

4. Se trata de una función exponencial de base un número comprendido entre 0 y 1. Entonces:

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$. $\text{Im } f = (0, +\infty)$. Cortes con el eje X : no tiene porque la función exponencial nunca se anula.

Cortes con el eje Y : $(0,1)$. f es decreciente en todo $\mathbb{R}$. La representación gráfica de la función es la siguiente:



5. Si consideramos los puntos $(x_0, y_0) = (60, 5,7)$, $(x_1, y_1) = (90, 7,2)$, entonces por interpolación lineal,

podemos hallar el consumo para cualquier velocidad según la función $f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$, que en

nuestro caso es $f(x) = \frac{7,2 - 5,7}{90 - 60}(x - 60) + 5,7 \Rightarrow f(x) = 0,05(x - 60) + 5,7 \Rightarrow f(x) = 0,05x + 2,7$.

El consumo estimado si el coche recorre 100 km a 80 km/h es: $f(80) = 0,05 \cdot 80 + 2,7 = 6,7$ litros.

6. a) Llamemos $y = 3x - 2$. Entonces $y + 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{y+2}{3}$. Por tanto: $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$.

b) Llamemos $y = \sqrt{x-1}$. Entonces $y^2 = x - 1 \Rightarrow x = y^2 + 1$. Por tanto: $f^{-1}(x) = x^2 + 1$.

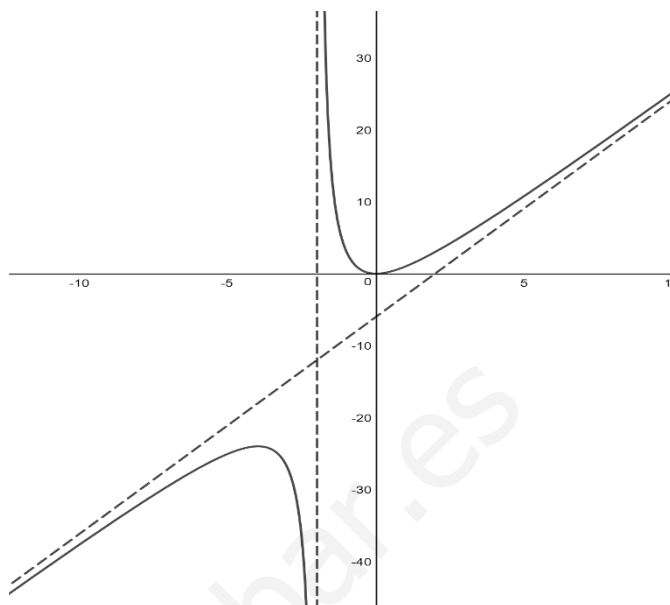
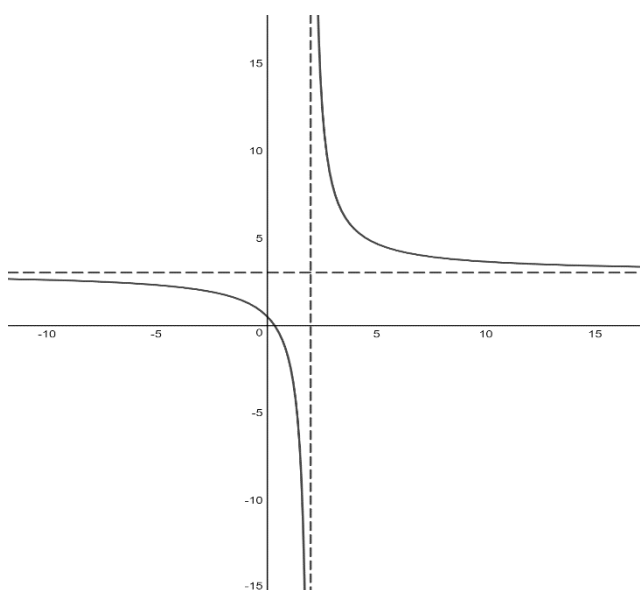
7. a) Como $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-1}{x-2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$, $x = 2$ es una asíntota vertical, y como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-1}{x-2} = 3$, $y = 3$ es una

asíntota horizontal. Al tener una asíntota horizontal, f no puede tener asíntotas oblicuas.

b) Como $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{x+2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$, $x = -2$ es una asíntota vertical, y como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x+2} = \pm\infty$, no tiene

asíntotas horizontales. Veamos si tiene oblicuas del tipo $y = mx + n$: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2 + 2x} = 3$.

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2}{x+2} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x}{x+2} = -6. \text{ Por tanto, una asíntota oblicua es } y = 3x - 6.$$



8. La función $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 3x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ es claramente continua en todo $\mathbb{R}$ salvo, quizá, en $x = -2$ y $x = 1$.

Estudiamos la continuidad en estos dos puntos.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (2x+1) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{no existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ por ser los límites laterales distintos. Por tanto } f \text{ no}$$

es continua en $x = -2$: hay una discontinuidad de salto finito de longitud $L = |-3 - 2| = 5$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2. \text{ Pero no existe } f(1), \text{ luego } f \text{ no es continua en } x = 1: \text{ en este}$$

punto hay una discontinuidad evitable.

9. La tasa de variación media (TVM) en un intervalo $[a, b]$ se utiliza para medir el crecimiento medio de una función

en ese intervalo. Su fórmula es $\text{TVM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. En el caso de las funciones que nos dan tenemos:

$$a_1) \text{TVM} = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{12 - 21}{1} = -9; \quad a_2) \text{TVM} = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1/2 - 1}{1} = -\frac{1}{2}.$$

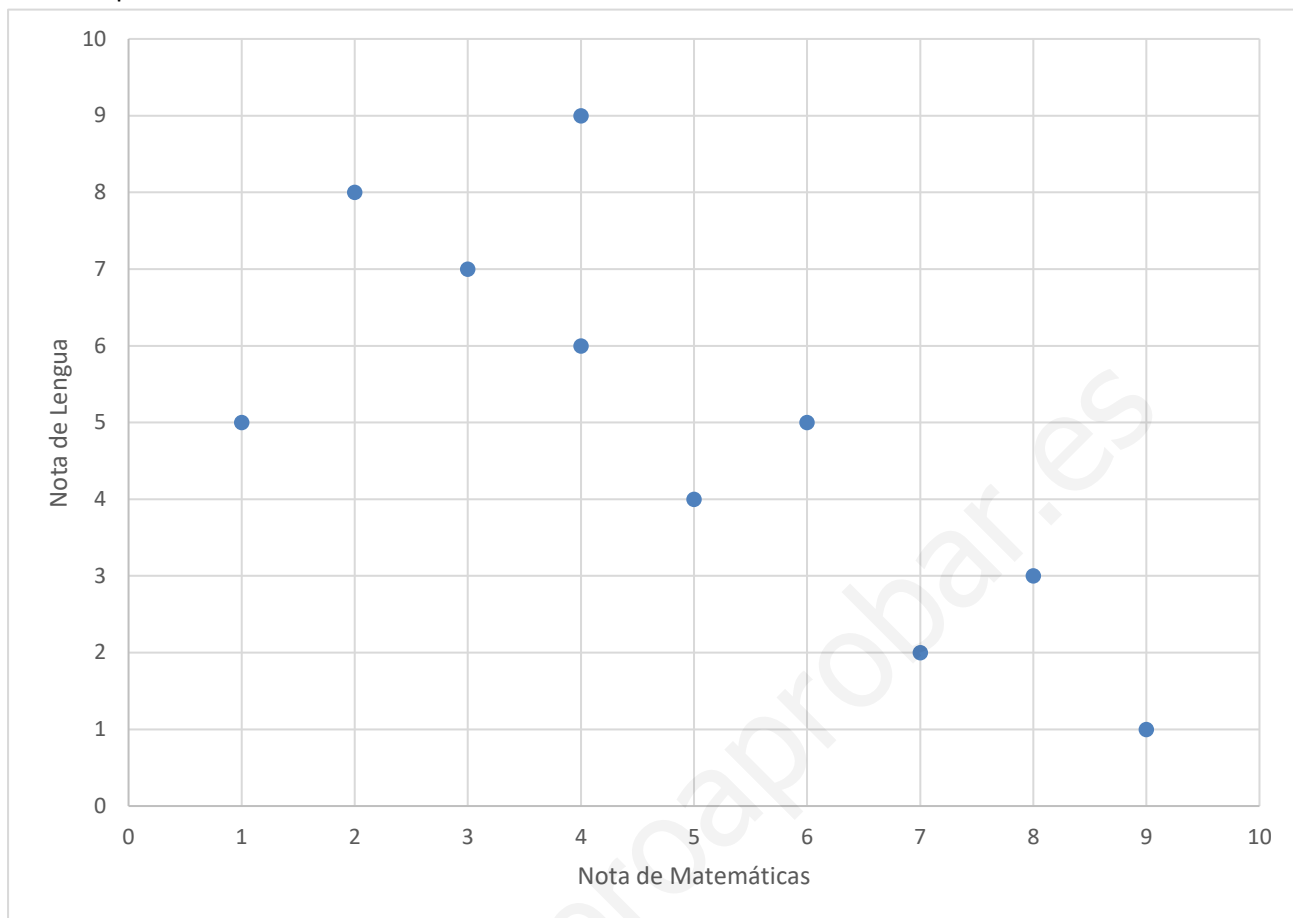
Usaremos las reglas de derivación para hacer las derivadas de las funciones que nos dan:

$$b_1) f(x) = \ln(3x^2 - 5x + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x^2 - 5x + 1} \cdot (6x - 5) = \frac{6x - 5}{3x^2 - 5x + 1}.$$

$$b_2) f(x) = \frac{x^2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

10. Estadística bidimensional

a) Nube de puntos:



Se deduce claramente del gráfico anterior que el coeficiente de correlación lineal r ha de ser negativo. Esto significa que, a más nota en Matemáticas, menos nota en Lengua y viceversa.

$$b) \quad \bar{x} = \frac{1+2+3+4+4+5+6+7+8+9}{10} = \frac{49}{10} = 4,9 ; \quad \bar{y} = \frac{5+8+7+6+9+4+5+2+3+1}{10} = \frac{50}{10} = 5.$$

$$c) \quad r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-4,6}{2,47 \cdot 2,45} \cong -0,76.$$

d) Podemos considerar que hay una relación fiable entre las variables por estar el coeficiente de correlación lineal mucho más cercano a -1 que a 0 .

$$e) \quad \text{Recta de regresión de } y \text{ sobre } x: y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} (x - \bar{x}) \Rightarrow y - 5 = \frac{-4,6}{6,1} (x - 4,9) \Rightarrow \\ \Rightarrow y - 5 = -0,75(x - 4,9) \Rightarrow y - 5 = -0,75x + 3,675 \Rightarrow y = -0,75x + 8,675.$$

f) Si un alumno tiene un $4,5$ ($x = 4,5$) en Matemáticas, podemos estimar, usando la recta de regresión del apartado anterior, su nota y en Lengua: $y = -0,75 \cdot 4,5 + 8,675 \Rightarrow y = 5,3$.