1. **[2 puntos]** Resuelve las siguientes inecuaciones de primer y de segundo grado con una incógnita. Debes de dar la solución en forma de intervalo o de unión de intervalos

a) $\frac{x-2}{2}-\frac{1-x}{3}\leq x$; b) $(2x+3)(2x-3)+5x>2(x+1)-1$

2. **[1 punto]** Resuelve el siguiente sistema de dos inecuaciones de primer grado con una incógnita. Debes representar la solución gráficamente y dar la solución del sistema en forma de intervalo.

$$\begin{cases} 2x+\frac{x}{4}\leq\frac{9}{4}-\frac{x-1}{2} \\ 2x-1-2(2x+1)<1 \end{cases}$$

3. Dada la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & \text{si} \quad x<-2 \\ x-2 & \text{si} \quad -2\leq x<1 \\ \frac{x-1}{x+2} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$, se pide:

   a) **[1 punto]** Estudiar la continuidad de la función en los puntos $x=-2$ y $x=1$. Si no es continua en alguno de ellos, explica razonadamente el tipo de discontinuidad existente.

   b) **[1,5 puntos]** Representarla gráficamente.

4. Dada la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} kx-2 & \text{si} \quad x<-2 \\ \frac{x-2}{3x+4} & \text{si} \quad -2\leq x<2 \\ x^2-x & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$, se pide

   a) **[1 punto]** Hallar de manera razonada el valor de k para que f sea continua en $x=-2$.

   b) **[1 punto]** Estudiar su continuidad en el punto $x=2$. Si no es continua decir el tipo de discontinuidad existente.

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo posible el resultado.

   a) **[0,5 puntos]** $f(x)=-5x^4+6x^3-\frac{5}{2}x^2-3x$

   b) **[1 punto]** $f(x)=\frac{2}{x}-\sqrt{x}$

   c) **[1 punto]** $f(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\cdot x^2$

Soluciones

1. **[2 puntos]** Resuelve las siguientes inecuaciones de primer y de segundo grado con una incógnita. Debes de dar la solución en forma de intervalo o de unión de intervalos

a) $\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{1-x}{3}\le x\Rightarrow 3(x-2)-2(1-x)\le 2x\Rightarrow 3x-6-2+2x\le 6x\Rightarrow 3x+2x-6x\le 6+2\Rightarrow$

$\Rightarrow -x\le 8\Rightarrow x\ge -8$. La solución en forma de intervalo es $[-8,+\infty)$.

b) $(2x+3)(2x-3)+5x>2(x+1)-1\Rightarrow 4x^2-9+5x>2x+2-1\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2-9+5x-2x-2+1>0\Rightarrow 4x^2+3x-10>0$.

Resolvemos la ecuación de segundo grado $4x^2+3x-10=0$.

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 4\cdot(-10)}}{2\cdot 4}=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{8}=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{8}=\frac{-3\pm 13}{8}=\begin{cases}x_1=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}\\[2mm] x_2=\dfrac{-16}{8}=-2\end{cases}.$$

Entonces la inecuación es equivalente a esta otra: $4\left(x-\dfrac{5}{4}\right)(x+2)>0$. Estudiemos los signos en los intervalos que dividen la recta real en tres trozos, separados por la soluciones de la ecuación

$(-\infty,-2)$	$\left(-2,\dfrac{5}{4}\right)$	$\left(\dfrac{5}{4},+\infty\right)$
+	**−**	**+**

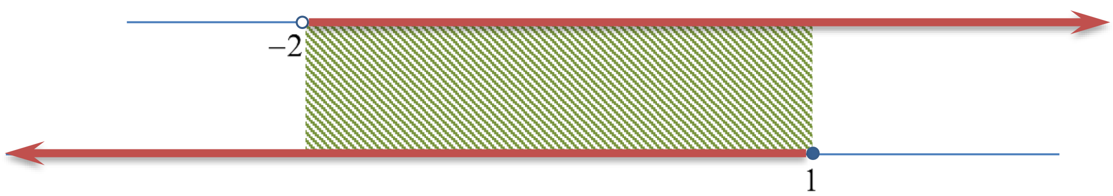
La solución es, por tanto, $(-\infty,-2)\cup\left(\dfrac{5}{4},+\infty\right)$.

2. **[1 punto]** Resuelve el siguiente sistema de dos inecuaciones de primer grado con una incógnita. Debes representar la solución gráficamente y dar la solución del sistema en forma de intervalo.

$$\begin{cases}2x+\dfrac{x}{4}\le\dfrac{9}{4}-\dfrac{x-1}{2}\\ 2x-1-2(2x+1)<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x+x\le 9-2(x-1)\\ 2x-1-2(2x+1)<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x+x\le 9-2x+2\\ 2x-1-4x-2<1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}8x+x+2x\le 9+2\\ 2x-4x<1+1+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}11x\le 11\\ -2x<4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\le 1\\ x>-2\end{cases}$$

Solución gráfica:



Solución en forma de intervalo: $x\in(-2,1]$.

3. Dada la siguiente función: $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & \text{si} \quad x<-2 \\ x-2 & \text{si} \quad -2\le x<1 \\ \dfrac{x-1}{x+2} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$, se pide:

a) **[1 punto]** Estudiar la continuidad de la función en los puntos $x=-2$ y $x=1$. Si no es continua en alguno de ellos, explica razonadamente el tipo de discontinuidad existente.

Continuidad en $x=-1$.

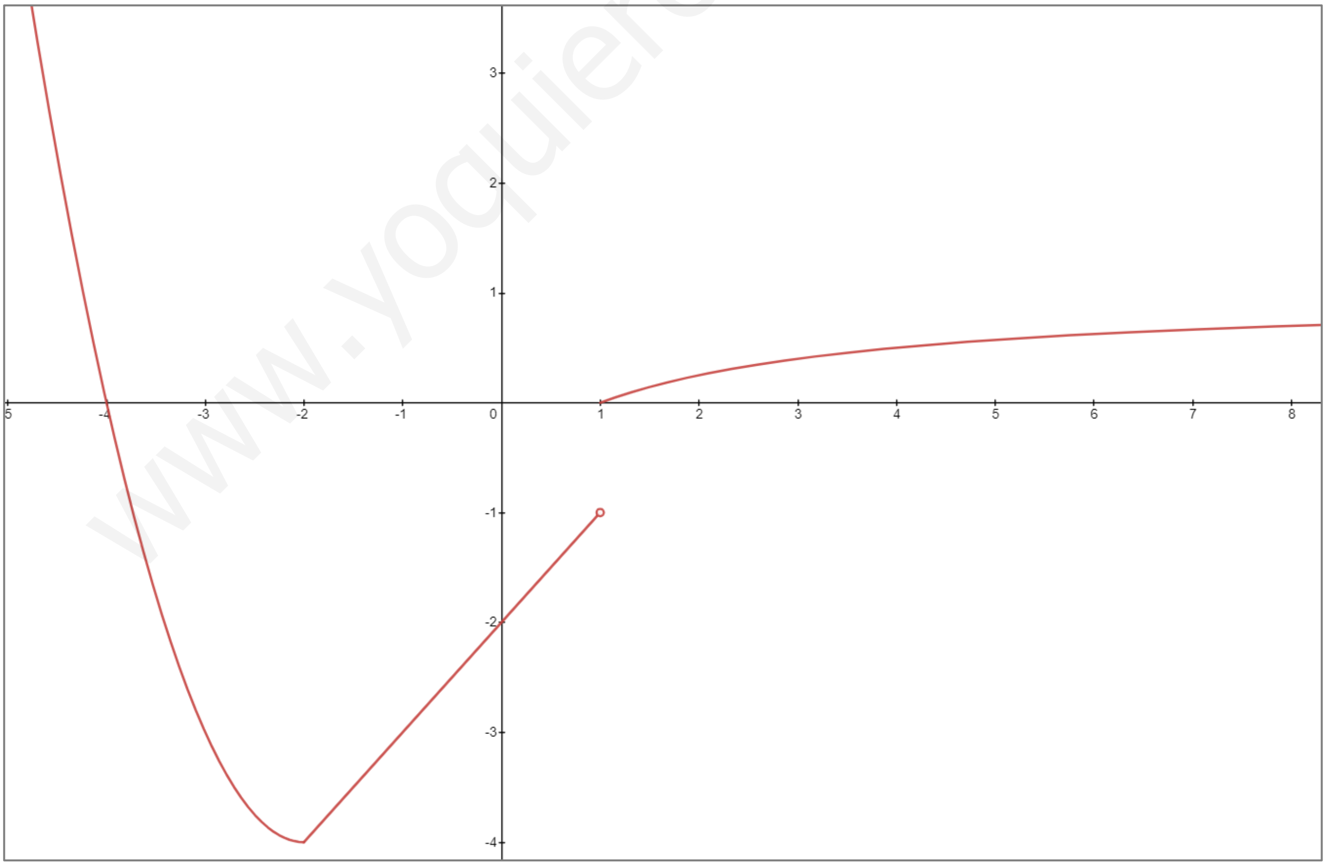
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(x^2+4x\right)=(-2)^2+4\cdot(-2)=4-8=-4 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(x-2)=-2-2=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to -2} f(x)=-4=f(-2).$$

Por tanto, f es continua en $x=-2$.

Continuidad en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-2)=1-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{1-1}{1+2}=\dfrac{0}{3}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$ no existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, con lo que f no es continua en $x=1$. Como los límites laterales son finitos hay una discontinuidad de salto finito en $x=1$.

b) **[1,5 puntos]** Representarla gráficamente.



4. Dada la siguiente función: $f\left(x\right)=\begin{cases} kx-2 & \text{si} \quad x<-2 \\ \dfrac{x-2}{3x+4} & \text{si} \quad -2\le x<2 \\ x^2-x & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$, se pide

a) **[1 punto]** Hallar de manera razonada el valor de k para que f sea continua en $x=-2$.

Para que sea continua en $x=-2$, en primer lugar, debe existir $\lim\limits_{x\to -2} f\left(x\right)$. Para ello deben existir los límites laterales y ser iguales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(k\cdot\left(-2\right)-2\right)=-2k-2 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x-2}{3x+4}=\dfrac{-2-2}{3\cdot\left(-2\right)+4}=\dfrac{-4}{-2}=2 \end{array}\right\}\Rightarrow -2k-2=2\Rightarrow -2k=4\Rightarrow k=-2$$

Para este valor de k se cumple que $\lim\limits_{x\to -2} f\left(x\right)=f\left(-2\right)$, con lo que f será continua en $x=-2$.

b) **[1 punto]** Estudiar su continuidad en el punto $x=2$. Si no es continua decir el tipo de discontinuidad existente.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{3x+4}=\dfrac{2-2}{3\cdot 2+4}=\dfrac{0}{10}=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-x\right)=2^2-2=4-2=2 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{ no existe } \lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)\Rightarrow f \text{ no es continua en } x=2$$

Como los límites laterales son finitos y distintos, hay una discontinuidad de salto finito.

5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica todo lo posible el resultado.

a) **[0,5 puntos]** $f\left(x\right)=-5x^4+6x^3-\dfrac{5}{2}x^2-3x$.

$$f'\left(x\right)=-5\cdot 4x^3+6\cdot 3x^2-\frac{5}{2}\cdot 2x-3\cdot 1=-20x^3+18x^2-5x-3.$$

b) **[1 punto]** $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x}-\sqrt{x}=2\cdot\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}$.

$$f'\left(x\right)=2\cdot\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-2}{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{-4\sqrt{x}-x^2}{2x^2\sqrt{x}}=\frac{\left(-4\sqrt{x}-x^2\right)\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{-4x-x^2\sqrt{x}}{2x^3}=\frac{-4-x\sqrt{x}}{2x^2}.$$

c) **[1 punto]** $f\left(x\right)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\cdot x^2=2\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\cdot x^2=2x^{-\frac{1}{3}}\cdot x^2=2x^{-\frac{1}{3}+2}=2x^{\frac{5}{3}}$. Entonces:

$$f'\left(x\right)=2\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}=\frac{10}{3}\sqrt[3]{x^2}.$$