1. **[2 puntos]** Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si} \quad x<-1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad -1\le x\le 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$$

Escribe el o los puntos en los que la función anterior no es continua.

2. **[5 puntos; 1 punto por apartado]** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2-4x^3+2x}{-x^2+3x+21}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x^3-2x^2+x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{6x^2}{3x-1}-2x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{x+9}{x^2-3x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x^2-1}-2x\right)$

Nota. En el cálculo de todos y cada uno de los límites anteriores debes hacer algún paso o explicación, por breve que sea, que conduzca a la solución.

3. Dada la siguiente función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}$:

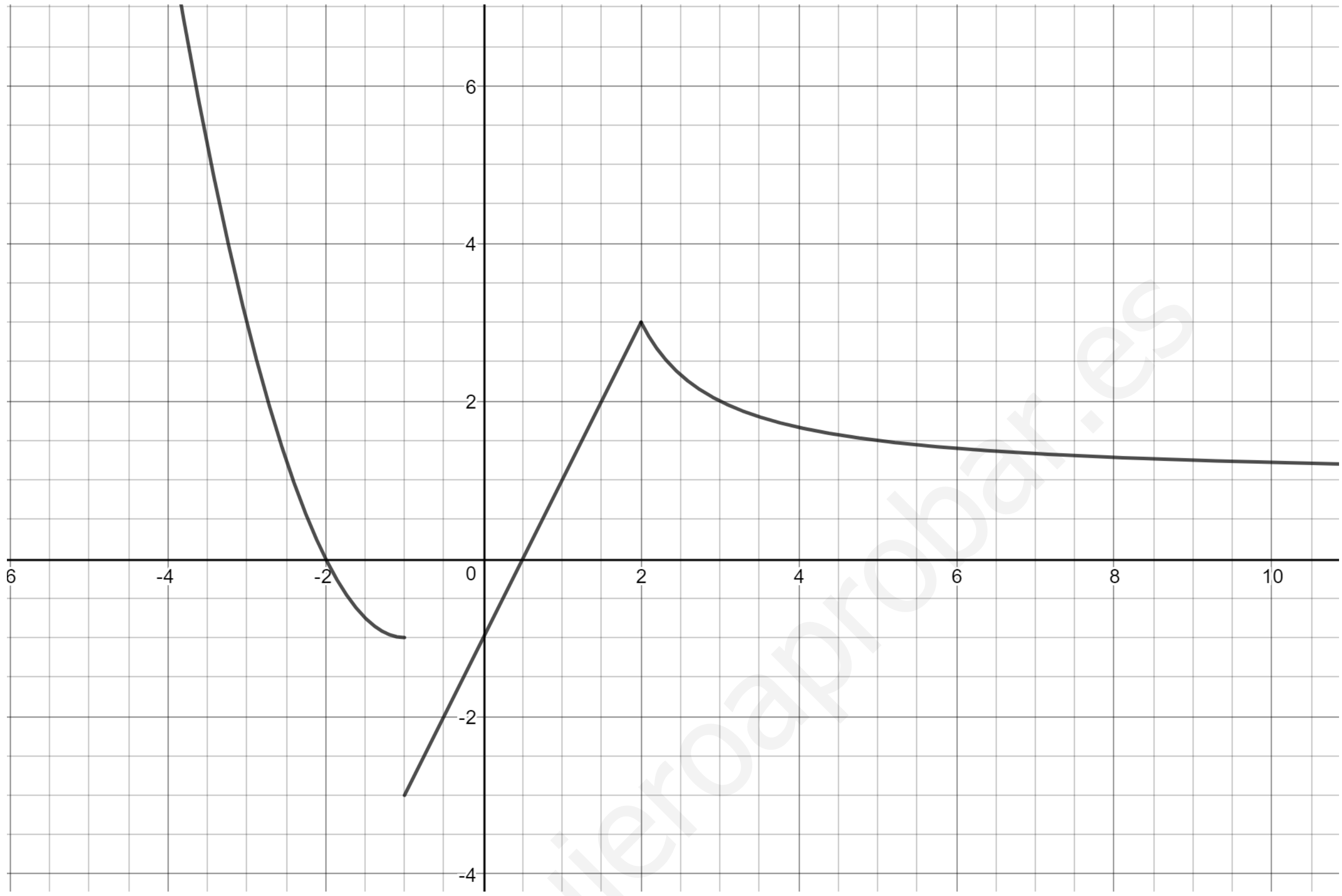
a) **[1,5 puntos]** Calcula las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

b) **[1 punto]** Hallar los puntos de corte con los ejes.

c) **[0,5 puntos]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes representar previamente las asíntotas y los puntos de corte con los ejes hallados en los apartados b) y c).

Soluciones

1. Representación gráfica:



La función no es continua en el punto $x=-1$.

2. Cálculo de límites.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x^3+2x}{-x^2+3x+21}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4x^3}{-x^2}=\left[\dfrac{-\cdot(-)^3}{-\cdot(-)^2}=\dfrac{+}{-}\right]=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x^3-2x^2+x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2(x-1)}{x(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{x(x-1)}=\left[\dfrac{2}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to1^-\\ +\infty & \text{si} \quad x\to1^+\end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6x^2}{3x-1}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2-2x(3x-1)}{3x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2-6x^2+2x}{3x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{3x-1}=\dfrac{2}{3}$

d) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{x+9}{x^2-3x}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{6}{x-3}-\dfrac{x+9}{x(x-3)}\right)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{6x-x-9}{x(x-3)}=$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{5x-9}{x^2-3x}=\left[\dfrac{6}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to3^-\\ +\infty & \text{si} \quad x\to3^+\end{cases}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2-1}-2x\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{3x^2-1}-2x\right)\left(\sqrt{3x^2-1}+2x\right)}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-1-4x^2}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{\sqrt{3x^2-1}+2x}=\left[\dfrac{-}{+}\right]=-\infty$

3. Dada la siguiente función $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}$:

a) ***Asíntotas verticales***: $x^2-1=0 \Rightarrow x=1$; $x=-1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x}{x^2-1}=\begin{cases}+\infty & \text{si} \quad x\to -1^- \\ -\infty & \text{si} \quad x\to -1^+\end{cases} \; ; \; \lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x}{x^2-1}=\begin{cases}+\infty & \text{si} \quad x\to 1^- \\ -\infty & \text{si} \quad x\to 1^+\end{cases} \; ; \; \begin{cases}x=-1 \\ x=1\end{cases}$$ son asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}=1$. Entonces $y=1$ es una asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas: como hay una asíntota horizontal no puede haber asíntotas oblicuas.

b) Puntos de corte con los ejes.

Con el eje X : hacemos $y=0$. Entonces $\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0 \\ x=2\end{cases}$. Por tanto los puntos de corte con el eje X son $(0,0)$ y $(2,0)$.

Con el eje Y : hacemos $x=0$. Entonces $y=\dfrac{0^2-2\cdot 0}{0^2-1}=\dfrac{0}{-1}=0$. Por tanto, el punto de corte con el eje Y es $(0,0)$, que ya lo habíamos obtenido antes.

c) Representación gráfica de la función.