

1. **[2 puntos]** Estudiar la continuidad de la siguiente función definida por trozos en los puntos $x = -3$ y $x = 3$. Caso de que no sea continua describir el tipo de continuidad existente.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+3} & \text{si } x < -3 \\ 5-x & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{-x-1}{x-5} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

2. **[3 puntos; 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica el resultado.

a) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

b) $y = (x+1) \cdot \ln(x^2 - 1)$

c) $y = \ln \sqrt{x^2 + 1}$

3. **[1 punto]** Hallar la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 - x + 5$ en el punto de abscisa $x = -2$.

4. Dada la siguiente función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$, se pide:

a) **[1 punto]** Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

b) **[0,5 puntos]** Hallar los puntos de corte con los ejes.

c) **[1,5 puntos]** Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos de la función (de estos últimos debes dar la coordenada x y la coordenada y).

d) **[1 punto]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes utilizar todos los datos de los tres apartados anteriores.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Estudiar la continuidad de la siguiente función definida por trozos. Caso de que no sea continua describir el tipo de continuidad existente.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + x & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{-x}{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{-1+1} = \left[\frac{2}{0} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2 + x) = -(-1)^2 + (-1) = -1 - 1 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{no existe el límite de } f(x) \text{ cuando } x \rightarrow -1$$

por ser distintos los límites laterales. Por tanto, f no es continua en $x = -1$. Además, como uno de los límites laterales es infinito, hay una discontinuidad de salto infinito en $x = -1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + x) = -2^2 + 2 = -4 + 2 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x}{x-1} = \frac{-2}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -2 = f(2), \text{ y de aquí se deduce que } f$$

es continua en $x = 2$.

2. **[3 puntos; 1 punto por apartado]** Calcula las derivadas de las siguientes funciones y simplifica el resultado.

$$\text{a) } y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}; y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x} - (x+1) \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{2x - x - 1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= 2x^2 \cdot (x + \sqrt{x}); y' = 4x \cdot (x + \sqrt{x}) + 2x^2 \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 4x^2 + 4x\sqrt{x} + 2x^2 + \frac{2x^2}{2\sqrt{x}} = \\ &= 6x^2 + 4x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{x} = 6x^2 + 4x\sqrt{x} + x\sqrt{x} = 6x^2 + 5x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\text{c) } y = \ln \sqrt{x^2 + 1}; y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{2x}{2(x^2 + 1)} = \frac{x}{x^2 + 1}$$

3. **[1 punto]** Hallar la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 - x + 5$ en el punto de abscisa $x = -2$.

La recta tangente a la gráfica de la función f en $x = -2$ viene dada por $y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2))$.

Por un lado $f(-2) = -2(-2)^2 - (-2) + 5 = -8 + 2 + 5 = -1$. Por otro lado, como $f'(x) = -4x - 1$, tenemos que $f'(-2) = -4(-2) - 1 = 8 - 1 = 7$. Por tanto, la recta tangente en $x = -2$ queda del siguiente modo:

$$y - (-1) = 7(x + 2) \Rightarrow y + 1 = 7x + 14 \Rightarrow y = 7x + 13$$

4. Dada la siguiente función $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$, se pide:

a) [1 punto] Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}. \text{ De aquí se deduce que } x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow +\infty \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}. \text{ Por tanto, } f \text{ no tiene asíntotas horizontales.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4 - (x^2 - x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 4}{x - 1} = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = x - 3 \text{ es la asíntota oblicua.}$$

b) [0,5 puntos] Hallar los puntos de corte con los ejes.

Si $y = 0$, $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$. Por tanto, el punto de corte con el eje X es el $(2, 0)$.

Si $x = 0$, $y = -4$. Por tanto, el punto de corte con el eje Y es el $(0, -4)$.

c) [1,5 puntos] Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos de la función (de estos últimos debes dar la coordenada x y la coordenada y).

$$f'(x) = \frac{(2x - 4)(x - 1) - (x^2 - 4x + 4) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - x^2 + 4x - 4}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que los posibles máximos o mínimos de la función son los puntos $x = 0$, $x = 2$. Confeccionemos una tabla que nos ayude a decidir.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo f'	+	-	-	+
Monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$

Resumiendo:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$.
- f presenta un máximo en $x = 0$. La coordenada y es $y = \frac{0^2 - 4 \cdot 0 + 4}{0 - 1} = \frac{4}{-1} = -4$. Por tanto, el máximo es el punto $(0, -4)$ (el punto de corte con el eje Y).
- f presenta un mínimo en $x = 2$. La coordenada y es $y = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 4}{2 - 1} = \frac{4 - 8 + 4}{1} = \frac{0}{1} = 0$. Por tanto, el mínimo es el punto $(2, 0)$ (el punto de corte con el eje X).

- d) **[1 punto]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes utilizar todos los datos de los tres apartados anteriores.

