

1. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x^2 - 9}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})$

2. **[2 puntos]** Estudiar la continuidad de la siguiente función definida por trozos en los puntos $x = -3$ y $x = 3$. Caso de que no sea continua describir el tipo de continuidad existente.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+3} & \text{si } x < -3 \\ 5-x & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{-x-1}{x-5} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

3. **[2 puntos; 1 punto por apartado]** Calcular las derivadas de las siguientes funciones y simplifica el resultado.

a) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

b) $y = (x+1) \cdot \ln(x^2 - 1)$

4. Dada la siguiente función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2}$, se pide:

- a) **[1 punto]** Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- b) **[0,5 puntos]** Hallar los puntos de corte con los ejes.
- c) **[1,5 puntos]** Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos de la función (de estos últimos debes dar la coordenada x y la coordenada y).
- d) **[1 punto]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes utilizar todos los datos de los tres apartados anteriores.

Soluciones

1. [2 puntos] Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 9x - 27}{x^2 - 9} = \left[\text{Indeterminación } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2+9)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+9}{x+3} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2) - (x-3)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}} = \frac{5}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

2. [2 puntos] Estudiar la continuidad de la siguiente función definida por trozos en los puntos $x = -3$ y $x = 3$. Caso de que no sea continua describir el tipo de continuidad existente.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+3} & \text{si } x < -3 \\ 5-x & \text{si } -3 \leq x \leq 3 \\ \frac{-x-1}{x-5} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x}{x+3} = \left[\frac{2}{0} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (5-x) = 5 - (-3) = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{no existe el límite de } f(x) \text{ cuando } x \rightarrow -3 \text{ por ser distintos los}$$

límites laterales. Por tanto, f no es continua en $x = -3$. Además, como uno de los límites laterales es infinito, hay una discontinuidad de salto infinito en $x = -3$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (5-x) = 5-3=2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x-1}{x-5} = \frac{-3-1}{3-5} = \frac{-4}{-2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 = f(3), \text{ y de aquí se deduce que } f \text{ es continua}$$

en $x = 3$.

3. [3 puntos; 1 punto por apartado] Calcular las derivadas de las siguientes funciones y simplificar el resultado.

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{\sqrt{x+1}}{x} \\ y' &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x - \sqrt{x+1} \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x-2(x+1)}{2\sqrt{x+1}}}{x^2} = \frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } y = (x+1) \cdot \ln(x^2-1)$$

$$y' = 1 \cdot \ln(x^2-1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x = \ln(x^2-1) + \frac{2x(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \ln(x^2-1) + \frac{2x}{x-1}$$

4. Dada la siguiente función $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2}$, se pide:

a) **[1 punto]** Calcular las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2} = \left[\frac{-9}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 0^- \\ \infty & \text{si } x \rightarrow 0^+ \end{cases}. \text{ De aquí se deduce que } x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x - 9}{x^2} = 2. \text{ Por tanto, } y = 2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener una asíntota horizontal no tiene asíntotas oblicuas.

b) **[0,5 puntos]** Hallar los puntos de corte con los ejes.

$$\text{Si } y = 0, 2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = 3 \end{cases}. \text{ Por tanto, los puntos de corte con el eje } X \text{ son } \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \text{ y } (3, 0).$$

Si $x = 0$, la imagen no existe pues 0 no pertenece al dominio de la función (de hecho, hemos visto que $x = 0$ es una asíntota vertical). Por tanto, no hay ningún punto de corte con el eje Y .

c) **[1,5 puntos]** Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos de la función (de estos últimos debes dar la coordenada x y la coordenada y).

$$f'(x) = \frac{(4x-3)x^2 - (2x^2 - 3x - 9) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 - 3x^2 - 4x^3 + 6x^2 + 18x}{x^4} = \frac{3x^2 + 18x}{x^4} = \frac{3x + 18}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 18 = 0 \Leftrightarrow 3x = -18 \Leftrightarrow x = -6 \Leftrightarrow x = -6$$

De lo anterior se deduce que el posible máximo o mínimo de la función es el punto $x = -6$. Confeccionemos una tabla que nos ayude a decidir.

	$(-\infty, -6)$	$(-6, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo f'	+	-	+
Monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$

Resumiendo:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty, -6) \cup (0, +\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(-6, 0)$
- f presenta un máximo en $x = -6$, pues en ese punto f pasa de ser creciente a ser decreciente.

$$\text{La coordenada } y \text{ del máximo es } y = \frac{2 \cdot (-6)^2 - 3 \cdot (-6) - 9}{(-6)^2} = \frac{72 + 18 - 9}{36} = \frac{81}{36} = \frac{9}{4}. \text{ Así pues, el}$$

$$\text{máximo es el punto } \left(-6, \frac{9}{4}\right) = (-6, 2,25).$$

- d) **[1 punto]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes utilizar todos los datos de los tres apartados anteriores.

