

1. **[2 puntos]** Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Escribe el o los puntos en los que la función anterior no es continua.

2. **[5 puntos; 1 punto por apartado]** Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x^3 + x - 1}{-3x^2 + 2x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + x \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{x^2}{x-2} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1}}$

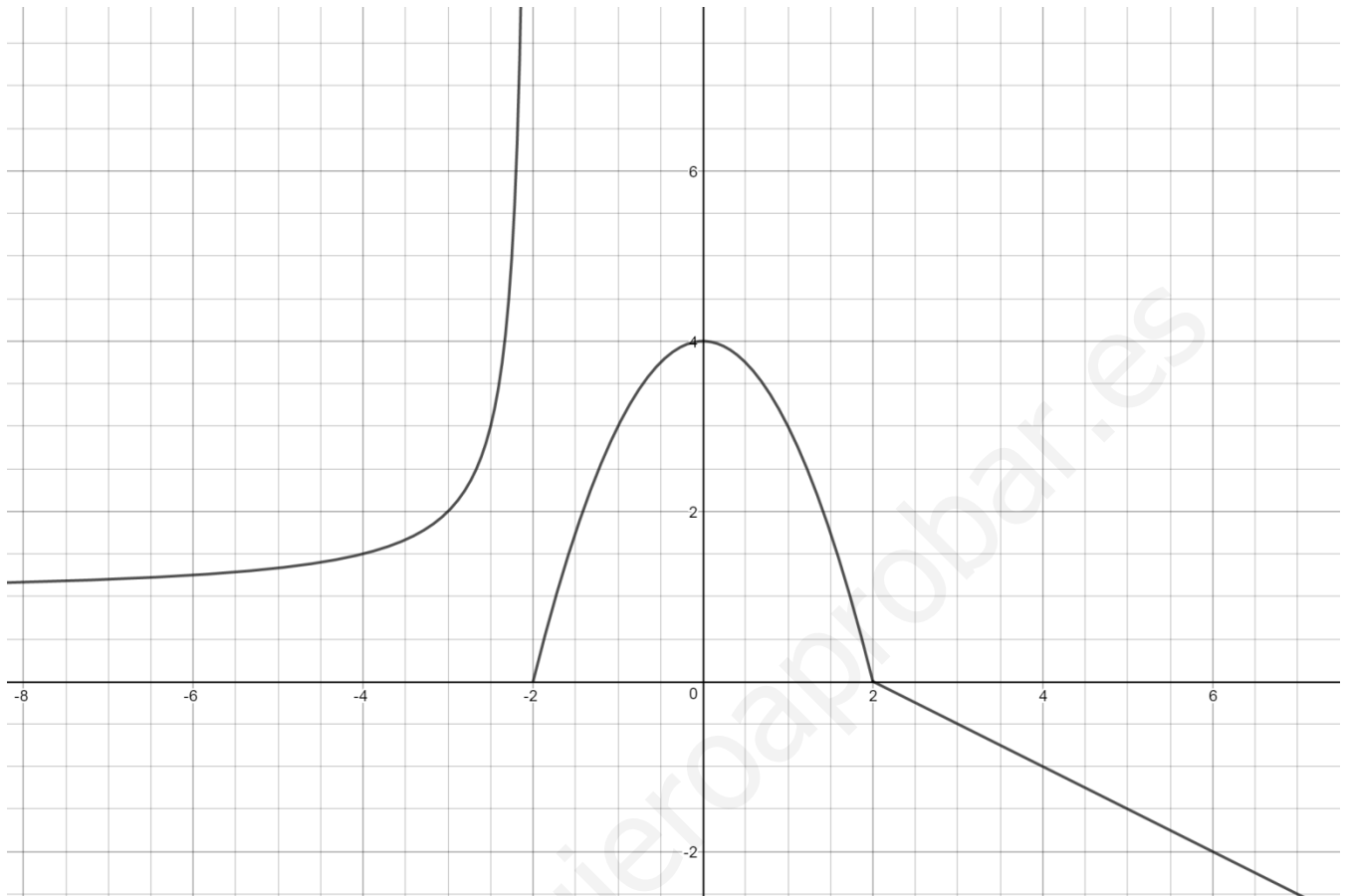
Nota. En el cálculo de todos y cada uno de los límites anteriores debes hacer algún paso o explicación, por breve que sea, que conduzca a la solución.

3. Dada la siguiente función $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4}$:

- a) **[1,5 puntos]** Calcula las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
b) **[1 punto]** Hallar los puntos de corte con los ejes.
c) **[0,5 puntos]** Realizar una representación gráfica aproximada de la función. Para ello debes representar previamente las asíntotas y los puntos de corte con los ejes hallados en los apartados b) y c).

Soluciones

1. Representación gráfica.



La función no es continua en $x = -2$.

2. Cálculo de límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x^3 + x - 1}{-3x^2 + 2x - 3} = \left[\frac{-(-)^3 = +}{-(-)^2 = -} \right] = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} + x \right) = \left[\frac{1}{0} - 2 \right] = \begin{cases} -\infty - 2 = -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ +\infty - 2 = +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - \frac{x^2}{x-2} \right) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x-2) - x^2(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3 - 2x^2}{x^2 - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2}{x^2 - 4} = \frac{-4}{1} = -4$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1})}{(x^2-1) - (x-1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1})}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1})}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x-1}}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

3. Dada la siguiente función $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4}$:

a) **Asíntotas verticales.** $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} = \left[\frac{-6}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} = \left[\frac{6}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$$

Entonces $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} = \pm\infty$. Por tanto, f no tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas. $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x}{x^3 - 4x} = 1$; $n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - x}{x^2 - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^2 - 4} = 0$.

Por tanto, la asíntota oblicua es $y = x$.

b) Puntos de corte con el eje X : $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$. Se obtienen haciendo $y = 0$:

$$0 = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1; x = 1 \end{cases}$$

Puntos de corte con el eje Y : $(0,0)$. Se obtiene haciendo $x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^3 - 0}{0^2 - 4} = \frac{0}{-4} = 0$.

c) Representación gráfica.

