

1. **[1 punto]** Usa la regla de Ruffini para factorizar el polinomio $p(x) = -2x^3 + 4x^2 + 10x - 12$. Escribe sus raíces.
2. **[1 punto]** Resuelve la siguiente ecuación racional: $\frac{4}{x+1} - \frac{3(x-1)}{x-2} = 2$
3. **[2 puntos]** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. El primero tiene dos incógnitas y es no lineal. El segundo es lineal con tres incógnitas y debes resolverlo usando el método de Gauss.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{x} + 1 - y = 0 \\ x - 1 = y - 2 \end{cases} ; \text{ b) } \begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x + 5y - 3z = 2 \end{cases}$$

4. **[1 punto]** Resuelve la siguiente inecuación de segundo grado. Expresa la solución en forma de intervalo.

$$x^2 - 3x + 5 < 2(x+1) - 1$$

5. **[1 punto]** Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$

6. **[1 punto]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{3} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \frac{x-2}{x-1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, estudia de manera razonada su continuidad en los

puntos $x = 1$ y $x = 3$. Caso de que no sea continua en alguno de los puntos explicar el tipo de discontinuidad.

7. **[1 punto]** Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ hallar su derivada y la recta tangente a dicha función en el punto $x = 3$

8. **[2 puntos]** Dada la función $f(x) = \frac{6x^2 - x}{x-1}$, calcula sus asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y posibles máximos y mínimos de la función.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Usa la regla de Ruffini para factorizar el polinomio $p(x) = -2x^3 + 4x^2 + 10x - 12$ y resolver la ecuación $p(x) = 0$.

		-2	4	10	-12	
1			-2	2	12	
	-2		2	12		0
-2			4	-12		
	-2		6			0
3			-6			
	-2					0

La factorización del polinomio es: $p(x) = -2(x-1)(x+2)(x-3)$. Las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$ coinciden con las raíces del polinomio, es decir: $x = 1$, $x = -2$ y $x = 3$.

2. **[1,5 puntos]** Resuelve la siguiente ecuación racional: $\frac{4}{x+1} - \frac{3(x-1)}{x-2} = 2$

$$\frac{4}{x+1} - \frac{3(x-1)}{x-2} = 2 ; 4(x-2) - 3(x+1)(x-1) = 2(x+1)(x-2) ; 4x - 8 - 3x^2 + 3 = 2x^2 - 2x - 4 ;$$

$$-5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

El determinante de la ecuación de segundo grado es: $\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-1) = 36 - 20 = 16$. Por tanto:

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-6 \pm 4}{-10} = \begin{cases} x_1 = \frac{-2}{-10} \Rightarrow x = \frac{1}{5} \\ x_2 = \frac{-10}{-10} \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

3. **[3 puntos]** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. El primero tiene dos incógnitas y es no lineal. El segundo es lineal con tres incógnitas y debes resolverlo usando el método de Gauss.

a) $\begin{cases} \frac{1}{x} + 1 - y = 0 \\ x - 1 = y - 2 \end{cases}$. Despejando y en la primera ecuación tenemos que $y = \frac{1}{x} + 1$. Sustituyendo este valor en

la segunda ecuación: $x - 1 = \frac{1}{x} + 1 - 2$; $x^2 - x = 1 + x - 2x$; $x^2 - 1 = 0$; $x^2 = 1$; $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Para $x = -1$ es $y = \frac{1}{-1} + 1 \Rightarrow y = -1 + 1 \Rightarrow y = 0$. Para $x = 1$ es $y = \frac{1}{1} + 1 \Rightarrow y = 1 + 1 \Rightarrow y = 2$.

b) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x + 5y - 3z = 2 \end{cases} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_2 + f_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 11 & -8 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{3f_3 - 11f_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -24 & -72 \end{pmatrix}$

El sistema asociado es $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3y = 6 \\ -24z = -72 \end{cases}$, cuyas soluciones son: $z = 3$, $y = 2$, $x = 1$.

4. **[1,5 puntos]** Resuelve la siguiente inecuación de segundo grado. Expresa la solución en forma de intervalo.

$x^2 - 3x + 5 < 2(x+1) - 1$; $x^2 - 3x + 5 < 2x + 2 - 1$; $x^2 - 5x + 4 > 0$. Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Esto quiere decir que la inecuación de segundo grado es equivalente a $(x-1)(x-4) < 0$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, +\infty)$
$x-1$	—	+	+
$x-4$	—	—	+
$(x-1)(x-4)$	+	—	+

Por tanto, la solución es el intervalo $(1, 4)$.

5. **[1 punto]** Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$

Al sustituir por $x = 3$, se presenta la indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \frac{9 - 3 - 6}{9 - 9} = \frac{0}{0}$. Para resolverla

factorizamos los polinomios y simplificamos: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+2)(x-3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x} = \frac{5}{3}$.

6. **[1 punto]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{3} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \frac{x-2}{x-1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, estudia de manera razonada su continuidad en los

puntos $x = 1$ y $x = 3$. Caso de que no sea continua en alguno de los puntos explicar el tipo de discontinuidad.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2x}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 2 - 1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1), \text{ y de aquí se deduce que } f \text{ es continua en } x = 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x - 1) = 6 - 1 = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{x-1} = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{no existe el límite de } f(x) \text{ cuando } x \rightarrow 3 \text{ por ser distintos los límites}$$

laterales. Por tanto, f no es continua en $x = 3$ (discontinuidad de salto finito).

7. [1 punto] Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$ hallar su derivada y la recta tangente a dicha función en el punto $x = 3$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{x+1} - x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}^2} = \frac{4x\sqrt{x+1} - x^2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{4x(x+1) - x^2}{2(x+1)\sqrt{x+1}} = \frac{3x^2 + 4x}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$$

La recta tangente en el punto $x = 3$ viene dada por $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$. Calculemos $f(3)$ y $f'(3)$:

$$f(3) = \frac{3^2}{\sqrt{3+1}} = \frac{9}{\sqrt{4}} = \frac{9}{2}; \quad f'(3) = \frac{27+12}{2 \cdot 4 \cdot \sqrt{4}} = \frac{39}{16}$$

Por tanto, la recta tangente viene dada por $y - \frac{9}{2} = \frac{39}{16}(x - 3) \Rightarrow y = \frac{39}{16}x - \frac{117}{16} + \frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{39}{16}x - \frac{45}{16}$.

8. [2 puntos] Dada la función $f(x) = \frac{6x^2 - x}{x - 1}$, calcula sus asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, y posibles máximos y mínimos de la función.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - x}{x - 1} = \left[\frac{5}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}. \text{ De aquí se deduce que } x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^2 - x}{x - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - x}{x - 1} = +\infty. \text{ Por tanto, } f \text{ no tiene asíntotas horizontales.}$$

Para ver si hay alguna asíntota oblicua $y = mx + n$ intentamos hallar los valores de m y de n :

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2 - x}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - x}{x^2 - x} = 6$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2 - x}{x - 1} - 6x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - x - 6x(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x}{x - 1} = 5$$

Por tanto, la recta $y = 6x + 5$ es una asíntota oblicua.

Para estudiar el crecimiento, decrecimiento y posibles máximos y mínimos de la función, hallamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{(12x - 1) \cdot (x - 1) - (6x^2 - x) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{12x^2 - 12x - x + 1 - 6x^2 + x}{(x - 1)^2} = \frac{6x^2 - 12x + 1}{(x - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 12x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,087 \\ x = 1,913 \end{cases}. \text{ De lo anterior se deduce que los posibles máximos o mínimos}$$

de la función son los puntos $x = 0,087$, $x = 1,913$. Confeccionemos una tabla que nos ayude a decidir.

	$(-\infty, 0,087)$	$(0,087; 1)$	$(1; 1,913)$	$(1,913, +\infty)$
Signo f'	+	-	-	+
Monotonía	↑↑	↓↓	↓↓	↑↑

De la tabla anterior obtenemos que f es creciente en $(-\infty, 0,087) \cup (1,913, +\infty)$ y es decreciente en $(0,087; 1) \cup (1; 1,913)$. Además, $x = 0,087$ es un máximo y $x = 1,913$ es un mínimo. De hecho, si sustituimos estos valores en la ecuación de la función obtenemos que el máximo es el punto $(0,087; 0,046)$ y el mínimo es el punto $(1,913; 21,954)$.