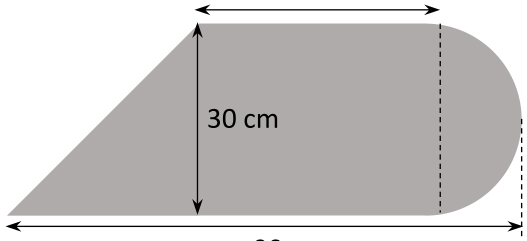
1. **[2 puntos]** Calcula el perímetro y el área de la siguiente región sombreada:



2. **[1 punto]** Calcula el área y el volumen de un cono de 8 cm de altura, cuyo radio de la base mide 4 cm.

3. **[1 punto]** Dados los polinomios $p(x)=2x^3+x^2-1$, $q(x)=x^2+2x$ y $r(x)=x^5-x^4+4x^3-x^2$, realiza la siguiente operación: $p(x)\cdot q(x)-r(x)$. Expresa el resultado ordenado de mayor a menor grado.

4. **[1 punto]** Simplifica usando las igualdades notables.

   a) $\left(\frac{x}{2}+3x\right)^2$; b) $(2x-3)^2+(2x+1)(2x-1)$

5. **[1 punto]** Sacar factor común en las siguientes expresiones:

   a) $-xyz+x^2yz^2-xy^2z$; b) $(2x+1)(x-2)-(x+1)(x-2)$

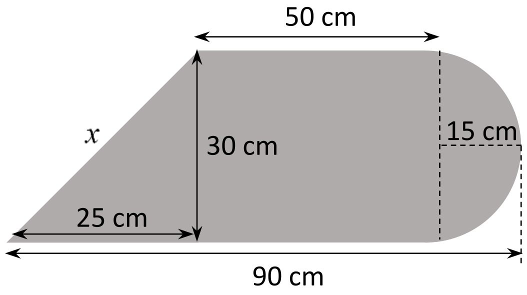
6. **[1 punto]** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 13 cm y uno de sus ángulos agudos es de 27,38º. Hallar la longitud de los dos catetos y la medida del otro ángulo agudo. Realiza un dibujo del triángulo.

7. **[1 punto]** El seno de un ángulo α del segundo cuadrante es igual a 0,27. Hallar el coseno y la tangente de α.

8. **[2 puntos]** Pablo y Luis están situados uno enfrente de otro a una distancia de 7,5 metros. Entre los dos hay un árbol. Pablo ve la copa del árbol con un ángulo de inclinación de 50º, y Luis la ve con un ángulo de inclinación de 40º. Calcula la altura del árbol. ¿A qué distancia está Pablo del árbol? Realizar un dibujo adecuado de la situación.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Calcula el perímetro y el área de la región sombreada:



La región sombreada está formada por un triángulo, un rectángulo y un semicírculo.

Para hallar el perímetro hemos de hallar primero el valor de x.

Usaremos el teorema de Pitágoras: $x^2 = 30^2 + 25^2 = 1525 \Rightarrow$ $x = \sqrt{1525} \cong 39,05$ cm. Por tanto, el perímetro es:

$P = 50 + \pi \cdot 15 + 75 + 39,05 = 211,17$ cm.

El área del triángulo es $A_T = \dfrac{25 \cdot 30}{2} = 375$ cm². El área del rectángulo es $A_R = 50 \cdot 30 = 1500$ cm. El área del semicírculo es $A_{SC} = \dfrac{\pi \cdot 15^2}{2} \cong 353,43$ cm². Por tanto, el área de la región sombreada es $A = A_T + A_R + A_{SC} = 375 + 1500 + 353,43 = 2228,43$ cm².

2. **[1 punto]** Calcula el área y el volumen de un cono de 8 cm de altura, cuyo radio de la base mide 4 cm.

En primer lugar hallaremos la generatriz del cono usando el teorema de Pitágoras:

$g^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow g^2 = 80 \Rightarrow g \cong 8,94$ cm.

El área del cono es $A = \pi r g + \pi r^2 = \pi \cdot 4 \cdot 8,94 + \pi \cdot 4^2 \cong 162,61$ cm².

El volumen del cono es $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot 8 \cong 134,04$ cm³.

3. **[1 punto]** Dados los polinomios $p(x) = 2x^3 + x^2 - 1$, $q(x) = x^2 + 2x$ y $r(x) = x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2$, realiza la siguiente operación: $p(x) \cdot q(x) - r(x)$. Expresa el resultado ordenado de mayor a menor grado.

Por un lado, tenemos que:

$$p(x) \cdot q(x) = \left(2x^3 + x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 + 2x\right) = 2x^5 + 4x^4 + x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$$

Por tanto:

$$p(x) \cdot q(x) - r(x) = 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - \left(x^5 - x^4 + 4x^3 - x^2\right) =$$

$$= 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 = x^5 + 6x^4 - 2x^3 - 2x$$

4. **[1 punto]** Simplifica usando las igualdades notables.

a) $\left(\dfrac{x}{2} + 3x\right)^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + 2 \cdot \dfrac{x}{2} \cdot 3x + (3x)^2 = \dfrac{x^2}{4} + 3x^2 + 9x^2 = \left(\dfrac{1}{4} + 3 + 9\right)x^2 = \dfrac{49}{4}x^2$

b) $(2x-3)^2 + (2x+1)(2x-1) = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 + (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 12x + 9 + 4x^2 - 1 = 8x^2 - 12x + 8$

5. **[1 punto]** Sacar factor común en las siguientes expresiones:

a) $-xyz + x^2yz^2 - xy^2z = xyz(-1 + xz - y)$

b) $(2x+1)(x-2) - (x+1)(x-2) = (x-2)(2x+1-(x+1)) = (x-2)(2x+1-x-1) = (x-2)x$

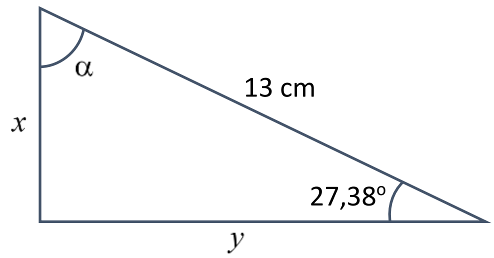
6. **[1 punto]** En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 13 cm y uno de sus ángulos agudos es de 27,38°. Hallar la longitud de los dos catetos y la medida del otro ángulo agudo. Realiza un dibujo del triángulo.

El ángulo que falta mide $\alpha = 90^\circ - 27,38^\circ = 62,62^\circ$.

Además:

$$\text{sen}\, 27,38^\circ = \frac{x}{13} \Rightarrow 0,46 = \frac{x}{13} \Rightarrow x = 0,46 \cdot 13 \Rightarrow x = 5,98 \text{ cm.}$$

$$\cos 27,38^\circ = \frac{y}{13} \Rightarrow 0,89 = \frac{y}{13} \Rightarrow y = 0,89 \cdot 13 \Rightarrow y = 11,57 \text{ cm.}$$



7. **[1 punto]** El seno de un ángulo α del segundo cuadrante es igual a 0,27. Hallar el coseno y la tangente de α.

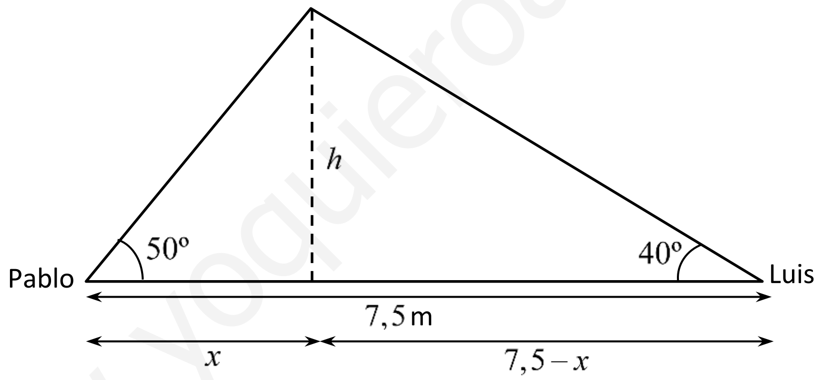
Usando la fórmula fundamental de la trigonometría tenemos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0,27^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0,27^2 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - 0,27^2} \Rightarrow \cos\alpha = -0,96$$

Observa que el coseno es negativo porque el ángulo α está en el segundo cuadrante. Finalmente:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{0,27}{-0,96} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -0,28$$

8. **[2 puntos]** Pablo y Luis están situados uno enfrente de otro a una distancia de 7,5 metros. Entre los dos hay un árbol. Pablo ve la copa del árbol con un ángulo de inclinación de 50°, y Luis la ve con un ángulo de inclinación de 40°. Calcula la altura del árbol. ¿A qué distancia está Pablo del árbol? Realizar un dibujo adecuado de la situación.



Hemos llamado h a la altura del árbol. También hemos llamado x a la distancia a la que se encuentra Pablo del árbol. Entonces, según el dibujo anterior:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg}\, 50^\circ = \dfrac{h}{x} \\[2ex] \text{tg}\, 40^\circ = \dfrac{h}{7,5 - x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1,19 = \dfrac{h}{x} \\[2ex] 0,84 = \dfrac{h}{7,5 - x} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} h = 1,19x \\ h = 0,84(7,5 - x) \end{array}\right\} \Rightarrow 1,19x = 0,84(7,5 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,19x = 6,3 - 0,84x \Rightarrow 1,19x + 0,84x = 6,3 \Rightarrow 2,03x = 6,3 \Rightarrow x = \frac{6,3}{2,03} \Rightarrow x = 3,1.$$

Sustituyendo x en la igualdad $h = 1,19x$, tenemos: $h = 1,19 \cdot 3,1 \Rightarrow h = 3,69$.

Por tanto, la altura del árbol es de 3,69 metros y la distancia a la que está Pablo de árbol es de 3,1 metros.