1. **[1 punto]** Supongamos que $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ y que el ángulo α está en el segundo cuadrante.

   Hallar $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Dar el resultado exacto, racionalizado y simplificado.

2. **[2 puntos]** En el centro de un lago sale verticalmente hacia arriba un chorro de agua, y se quiere medir su altura. Para ello, se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtienen 68°. Alejándose 75 metros del lago se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 37°. Calcula la altura del chorro de agua. Realizar un dibujo adecuado de la situación.

3. **[1 punto]** Usa las propiedades de las potencias para operar y dar el resultado en forma de una sola potencia.

   a) $\dfrac{5^3}{\left(5^{-2}\right)^3 \cdot 5}$; b) $\dfrac{2^{-3} \cdot (-2)^4 \cdot (-4)^{-1}}{-2}$

4. **[2 puntos]** Realiza las operaciones usando las propiedades de las potencias hasta simplificar el resultado al máximo. Puedes expresar el resultado en forma de potencia.
   Consejo: *factoriza previamente los números que no sean primos.*

   a) $\dfrac{25^2 \cdot 5^{-2} \cdot 5^3 \cdot 45^2}{\left(5^3\right)^2 \cdot 27 \cdot 3^{-2}}$; b) $\dfrac{4^4 \cdot 8^{-1} \cdot 16^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 8^6}$

5. **[1 punto]** Opera y expresa el resultado en forma de un solo radical.

   a) $-\sqrt{75} + \dfrac{3\sqrt{12}}{2}$; b) $\sqrt{8} + 3 \cdot \left(2\sqrt{18} - \sqrt{50}\right)$

6. **[2 puntos]** Usa las propiedades de los radicales para expresar el resultado en forma de un solo radical. Extrae factores del resultado final si es posible.

   a) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[8]{81}$; b) $\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$

7. **[1 punto]** Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

   a) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}$; b) $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

Soluciones

1. **[1 punto]** Supongamos que $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ y que el ángulo α está en el segundo cuadrante.

   Hallar $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$. Dar el resultado exacto, racionalizado y simplificado.

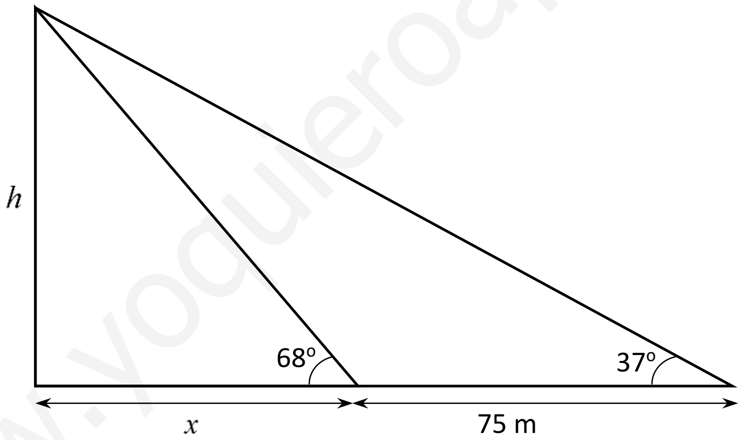
$$1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1+\frac{10}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{14}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{2}{7} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{2}{7}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{14}}{7}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{140}}{14} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2^2\cdot 5\cdot 7}}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{35}}{14} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{35}}{7}$$

2. **[2 puntos]** En el centro de un lago sale verticalmente hacia arriba un chorro de agua, y se quiere medir su altura. Para ello, se mide el ángulo de elevación desde la orilla a la parte más alta del chorro de agua y se obtienen 68^o. Alejándose 75 metros del lago se vuelve a medir el ángulo de elevación y se obtienen 37^o. Calcula la altura del chorro de agua. Realizar un dibujo adecuado de la situación.



En la figura anterior hemos llamado h a la altura del chorro de agua. También hemos llamado x a la distancia del centro del lago a la orilla. Teniendo esto en cuenta podemos plantear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}68^\text{o} = \dfrac{h}{x} \\ \operatorname{tg}37^\text{o} = \dfrac{h}{x+75} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2,48 = \dfrac{h}{x} \\ 0,75 = \dfrac{h}{x+75} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 2,48x \\ h = 0,75(x+75) \end{cases}$$

Entonces: $2,48x = 0,75(x+75) \Rightarrow 2,48x = 0,75x + 56,25 \Rightarrow 1,73x = 56,25 \Rightarrow x = \frac{56,25}{1,73} \Rightarrow x = 32,51$

Sustituyendo el valor de x en la primera ecuación: $h = 2,48x \Rightarrow h = 2,48\cdot 32,51 \Rightarrow h = 80,62$

Por tanto, la altura del chorro de agua es de 80,62 metros.

3. **[1 punto]** <u>Usa las propiedades de las potencias</u> para operar y dar el resultado en forma de una sola potencia.

a) $$\frac{5^3}{\left(5^{-2}\right)^3\cdot 5}=\frac{5^3}{5^{-6}\cdot 5}=\frac{5^3}{5^{-5}}=5^8$$

b) $$\frac{2^{-3}\cdot(-2)^4\cdot(-4)^{-1}}{-2}=\frac{2^{-3}\cdot 2^4\cdot 4^{-1}}{2}=\frac{2^{-3}\cdot 2^4\cdot\left(2^2\right)^{-1}}{2}=\frac{2^{-3}\cdot 2^4\cdot 2^{-2}}{2}=\frac{2^{-1}}{2}=2^{-2}=\frac{1}{4}$$

4. **[2 puntos]** Realiza las operaciones <u>usando las propiedades de las potencias</u> hasta simplificar el resultado al máximo. Puedes expresar el resultado en forma de potencia.

***<u>Consejo</u>**: factoriza previamente los números que no sean primos.*

a) $$\frac{25^2\cdot 5^{-2}\cdot 5^3\cdot 45^2}{\left(5^3\right)^2\cdot 27\cdot 3^{-2}}=\frac{\left(5^2\right)^2\cdot 5^{-2}\cdot 5^3\cdot\left(3^2\cdot 5\right)^2}{\left(5^3\right)^2\cdot 3^3\cdot 3^{-2}}=\frac{5^4\cdot 5^{-2}\cdot 5^3\cdot 3^4\cdot 5^2}{5^6\cdot 3^3\cdot 3^{-2}}=\frac{3^4\cdot 5^7}{3^1.5^6}=3^3\cdot 5^1=27\cdot 5=135$$

b) $$\frac{4^4\cdot 8^{-1}\cdot 16^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 8^6}=\frac{\left(2^2\right)^4\cdot\left(2^3\right)^{-1}\cdot\left(2^4\right)^2}{\left(2^{-1}\right)^3\cdot\left(2^3\right)^6}=\frac{2^8\cdot 2^{-3}\cdot 2^8}{2^{-3}\cdot 2^{18}}=\frac{2^{13}}{2^{15}}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

5. **[1 punto]** Opera y expresa el resultado en forma de un solo radical.

a) $$-\sqrt{75}+\frac{3\sqrt{12}}{2}=-\sqrt{3\cdot 5^2}+\frac{3}{2}\sqrt{2^2\cdot 3}=-5\sqrt{3}+\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{3}=-5\sqrt{3}+3\sqrt{3}=(-5+3)\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$$

b) $$\sqrt{8}+3\cdot\left(2\sqrt{18}-\sqrt{50}\right)=\sqrt{2^3}+3\cdot\left(2\sqrt{2\cdot 3^2}-\sqrt{2\cdot 5^2}\right)=2\sqrt{2}+3\cdot\left(2\cdot 3\sqrt{2}-5\sqrt{2}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}+3\cdot\left(6\sqrt{2}-5\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

6. **[2 puntos]** <u>Usa las propiedades de los radicales</u> para expresar el resultado en forma de un solo radical. Extrae factores del resultado final si es posible.

a) $$\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[8]{81}=\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[8]{3^4}=\sqrt[24]{2^{12}}\cdot\sqrt[24]{2^{12}}\cdot\sqrt[24]{3^{12}}=\sqrt[24]{2^{12}\cdot 2^{12}\cdot 3^{12}}=\sqrt[24]{2^{24}\cdot 3^{12}}=2\sqrt[24]{3^{12}}=2\sqrt{3}$$

b) $$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt[6]{2^2}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4}$$

7. **[1 punto]** Racionaliza las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

a) $$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{27}}=\frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt{27}\cdot\sqrt{27}}=\frac{3\sqrt{54}}{\sqrt{27}^2}=\frac{3\sqrt{2\cdot 3^3}}{27}=\frac{3\cdot 3\sqrt{3\cdot 2}}{27}=\frac{9\sqrt{6}}{27}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

b) $$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{27}-\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=\frac{\sqrt{7}\sqrt{7}+\sqrt{7}\sqrt{5}+\sqrt{5}\sqrt{7}+\sqrt{5}\sqrt{5}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{5}^2}=\frac{\sqrt{49}+\sqrt{35}+\sqrt{35}+\sqrt{25}}{7-5}=$$

$$=\frac{7+\sqrt{35}+\sqrt{35}+5}{2}=\frac{12+2\sqrt{35}}{2}=6+\sqrt{35}$$