Examen de Matemáticas de 4º ESO

1. El cateto opuesto a un ángulo α en un triángulo rectángulo mide 6 cm. Además, el seno de ese ángulo α es igual a $0,45$.
   a) **[0,5 puntos]** Realizar un dibujo de la situación expresada en el enunciado anterior.
   b) **[1 punto]** Sin hallar previamente el ángulo α, calcular la medida del otro cateto y de la hipotenusa.
   c) **[1 punto]** Usar la calculadora para hallar el ángulo α. ¿Cuánto vale el otro ángulo agudo del triángulo rectángulo?

2. Contesta razonadamente a los dos apartados siguientes. En ambos apartados hay que dar resultados ***exactos, simplificados y racionalizados*** (no se aceptarán aproximaciones decimales).
   a) **[1 punto]** De un ángulo desconocido α, se sabe que se encuentra en el tercer cuadrante y que $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$
      Hallar $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$.
   b) **[1 punto]** De un ángulo desconocido α, se sabe que se encuentra en el cuarto cuadrante y que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
      Hallar $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

3. **[2 puntos]** ***Haciendo uso de las razones trigonométricas de*** 30° ***,*** 45° ***y*** 60° (las cuales puedes llevar en una tabla o visualizarlas en tu calculadora) reduce los siguientes ángulos al primer cuadrante y halla, de manera razonada, las siguientes razones trigonométricas.
   a) $\cos 225^{\circ}$; b) $\operatorname{sen} 120^{\circ}$; c) $\operatorname{tg} 240^{\circ}$; d) $\cos\left(-60^{\circ}\right)$
   Hay que dar valores exactos, simplificados y racionalizados (no se aceptarán aproximaciones decimales).

4. **[1,5 puntos]** Halla, usando la calculadora, las razones trigonométricas de 64° (redondea los resultados a tres cifras decimales). ***Usa los resultados obtenidos*** para calcular las razones trigonométricas del ángulo complementario, suplementario y opuesto a 64°.

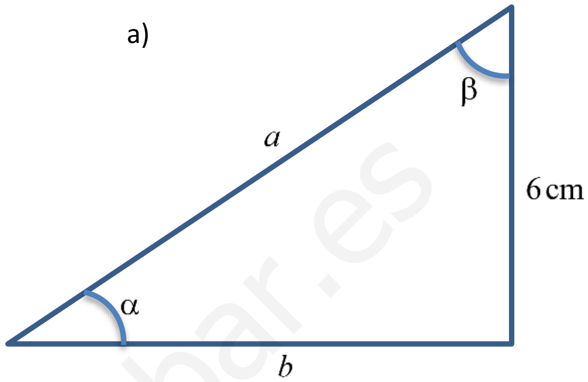
Problema

5. Situado a 50 metros de la base de una torre, veo su parte más alta con un ángulo de 35°. Si camino 20 metros en dirección a la misma, veo ahora su parte más alta con un ángulo de 58°. ¿Cuál es la altura de la torre?

Soluciones

1. El cateto opuesto a un ángulo α en un triángulo rectángulo mide 6 cm. Además, el seno de ese ángulo α es igual a $0,45$.
   a) **[0,5 puntos]** Realizar un dibujo de la situación expresada en el enunciado anterior.
   b) **[1 punto]** Sin hallar previamente el ángulo α, calcular la medida del otro cateto y de la hipotenusa.
   c) **[1 punto]** Usar la calculadora para hallar el ángulo α. ¿Cuánto vale el otro ángulo agudo del triángulo rectángulo?

a)



b) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{6}{a} \Rightarrow 0,45 = \dfrac{6}{a} \Rightarrow a = \dfrac{6}{0,45} \Rightarrow a = 13,33\,\text{cm}$

$13,33^2 = 6^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 13,33^2 - 6^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \sqrt{13,33^2 - 6^2} \Rightarrow b = 11,9\,\text{cm}$

c) $\operatorname{sen}\alpha = 0,45 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arcsen} 0,45 \Rightarrow \alpha \cong 26,74^{\circ}$

$\beta = 90^{\circ} - 26,74^{\circ} \Rightarrow \beta = 63,26^{\circ}$.

2. Contesta razonadamente a los dos apartados siguientes. En ambos apartados hay que dar ***resultados exactos, simplificados y racionalizados*** (no se aceptarán aproximaciones decimales).
   a) **[1 punto]** De un ángulo desconocido α, se sabe que se encuentra en el tercer cuadrante y que $\cos\alpha = -\dfrac{1}{3}$

   Hallar $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$.

$$\operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{-1/3} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}.$$

   b) **[1 punto]** De un ángulo desconocido α, se sabe que se encuentra en el cuarto cuadrante y que $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

   Hallar $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{5}{4} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{4}{9}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{3}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. **[2 puntos]** ***Haciendo uso de las razones trigonométricas de*** 30°***,*** 45° ***y*** 60° (las cuales puedes llevar en una tabla o visualizarlas en tu calculadora) reduce los siguientes ángulos al primer cuadrante y halla, de manera razonada, las siguientes razones trigonométricas.

a) $\cos 225^{\circ} = \cos\left(180^{\circ} + 45\right) = -\cos 45^{\circ} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\operatorname{sen} 120^{\circ} = \operatorname{sen}\left(180^{\circ} - 60^{\circ}\right) = \operatorname{sen} 60^{\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg}\left(180^\circ + 60^\circ\right) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.

d) $\cos\left(-60^\circ\right) = \cos\left(360^\circ - 60^\circ\right) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$.

4. **[1,5 puntos]** Halla, usando la calculadora, las razones trigonométricas de 64° (redondea los resultados a tres cifras decimales). ***<u>Usa los resultados obtenidos</u>*** para calcular las razones trigonométricas del ángulo complementario, suplementario y opuesto a 64°.

   Usando la calculadora, las razones trigonométricas de 64° son (redondeando a 3 decimales):

   $\operatorname{sen} 64^\circ = 0,899$, $\cos 64^\circ = 0,438$ y $\operatorname{tg} 64^\circ = 2,050$.

   - El ángulo complementario de 64° es 26° (ambos suman 90°). Entonces:

     $$\operatorname{sen} 26^\circ = \cos 64^\circ = 0,438,\ \cos 26^\circ = \operatorname{sen} 64^\circ = 0,889,\ \operatorname{tg} 26^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 64^\circ} = \frac{1}{2,050} = 0,488.$$

   - El ángulo suplementario de 64° es 116° (ambos suman 180°). Entonces:

     $$\operatorname{sen} 116^\circ = \operatorname{sen} 64^\circ = 0,899,\ \cos 116^\circ = -\cos 64^\circ = -0,438,\ \operatorname{tg} 116^\circ = -\operatorname{tg} 64^\circ = -2,050.$$

   - El ángulo opuesto de 64° es -64° (ambos suman 0°). Este último se puede identificar, si se quiere, con 296°. Entonces:

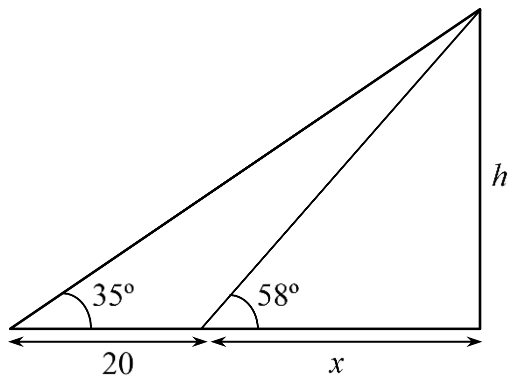
     $$\operatorname{sen}\left(-64^\circ\right) = \operatorname{sen} 296^\circ = -\operatorname{sen} 64^\circ = -0,899,\ \cos\left(-64^\circ\right) = \cos 296^\circ = \cos 64^\circ = 0,438,$$

     $$\operatorname{tg}\left(-64^\circ\right) = \operatorname{tg} 296^\circ = -\operatorname{tg} 64^\circ = -2,050.$$

Problema

5. **[2 puntos]** A cierta distancia de la base de una torre, veo su parte más alta con un ángulo de 35°. Si camino 20 metros en dirección a la misma, veo ahora su parte más alta con un ángulo de 58°. ¿Cuál es la altura de la torre?

   Observando la figura de la derecha, de los dos triángulos rectángulos que se forman, podemos deducir lo siguiente:

   $$\begin{cases} \operatorname{tg} 35^\circ = \dfrac{h}{20+x} \\ \operatorname{tg} 58^\circ = \dfrac{h}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \left(20+x\right) \\ h = \operatorname{tg} 58^\circ \cdot x \end{cases}$$. Por igualación:

   $$\operatorname{tg} 35^\circ \cdot \left(20+x\right) = \operatorname{tg} 58^\circ \cdot x \Rightarrow 0,7\left(20+x\right) = 1,6x \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow 14 + 0,7x = 1,6x \Rightarrow 14 = 1,6x - 0,7x \Rightarrow 14 = 0,9x \Rightarrow$$

   $$\Rightarrow x = \frac{14}{0,9} \Rightarrow x = 15,56 \text{ m}.$$

   Entonces $h = \operatorname{tg} 58^\circ \cdot x \Rightarrow h = \operatorname{tg} 58^\circ \cdot 15,56 \Rightarrow h = 24,9$.

   Así pues, la altura de la torre es de 24,9 metros.