

1.- (2 puntos)

Determinar el valor del parámetro a para que las rectas $r: 5x - y = 0$ y $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{a}$ formen un ángulo de 60° (Dar resultado de a en forma decimal, aproximando hasta milésimas)

2.- (2 puntos)

Calcula el valor de m para que la distancia entre las rectas r y s sea de 2 unidades, siendo: $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4}$ y $s: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = m + 4t \end{cases}$

3.- (3 puntos)

Calcular la recta r' simétrica de la recta $r: x - y = 0$ respecto de la recta $s: 2x + y - 6 = 0$

4.- (3 puntos)

Calcular el ortocentro del triángulo de vértices $A = (2, 1)$, $B = (-1, 0)$ y $C = (1, -1)$

① ¿a? $(\hat{r}, \hat{s}) = 60^\circ$ $r: 5x - y = 0$ $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{a}$

$$\cos(\hat{r}, \hat{s}) = |\cos(\vec{U}_r, \vec{U}_s)| = \left| \frac{(1,5) \cdot (2,a)}{|(1,5)| \cdot |(2,a)|} \right| = \frac{|1 \cdot 2 + 5 \cdot a|}{\sqrt{1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + a^2}} =$$

$$\vec{n}_r = (5, -1) \Rightarrow \vec{U}_r = (1, 5) \parallel \vec{U}_s = (2, a) = \frac{|2 + 5a|}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{4 + a^2}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{|2 + 5a|}{\sqrt{104 + 26a^2}} \Rightarrow \sqrt{104 + 26a^2} = 2 \cdot |2 + 5a| \Rightarrow$$

Al elevar los 2 miembros al cuadrado, desaparece el valor absoluto por ser igual el resultado:

$$104 + 26a^2 = 2^2 \cdot (2 + 5a)^2 \Rightarrow 104 + 26a^2 = 4 \cdot (4 + 20a + 25a^2)$$

$$104 + 26a^2 = 16 + 80a + 100a^2 \Rightarrow 74a^2 + 80a - 88 = 0 \Rightarrow 37a^2 + 40a - 44 = 0$$

$$a = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 37 \cdot (-44)}}{2 \cdot 37} = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 + 6512}}{74} = \frac{-40 \pm \sqrt{8112}}{74} = \frac{-40 \pm 90,067}{74} =$$

$$= \begin{cases} a_1 = \frac{50,067}{74} = 0,6766 \\ a_2 = \frac{-130,067}{74} = -1,7577 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = m + 4t \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{3} = \frac{4}{4} \Rightarrow r \parallel s$$

② ¿m? $d(r, s) = 2$ $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{4}$ $P_s = (4, m)$

$$2 = d(r, s) = d(P_s, r) \text{ y } P_s = (4, m)$$

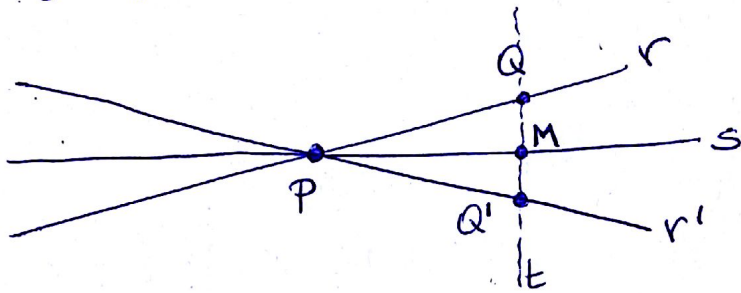
$$r: 4(x-2) = 3(y+2) \Rightarrow 4x - 8 = 3y + 6 \Rightarrow 4x - 3y - 14 = 0 : r$$

$$2 = \frac{|4 \cdot 4 - 3 \cdot m - 14|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \Rightarrow 2 = \frac{|16 - 3m - 14|}{\sqrt{25}} \Rightarrow 2 \cdot 5 = |2 - 3m| \Rightarrow$$

$$10 = |2 - 3m| \begin{cases} 10 = 2 - 3m \Rightarrow 3m = 2 - 10 \Rightarrow 3m = -8 \Rightarrow m = -\frac{8}{3} \\ -10 = 2 - 3m \Rightarrow 3m = 2 + 10 \Rightarrow 3m = 12 \Rightarrow m = \frac{12}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{m = 4}$$

③ $d(r')$? $r: x-y=0$ y $s: 2x+y-6=0$ $r'=r_s$ (simétrica)



$P = r \cap s$ y $P \in r'$
 $Q \in r$ y $t: \begin{cases} Q \in t \\ t \perp s \end{cases}$

$M = t \cap s$

Con Q y M se calcula Q' y por último $r': \begin{cases} P \\ Q' \end{cases}$

$P \begin{cases} r: x-y=0 \Rightarrow x=y \\ s: 2x+y-6=0 \Rightarrow 2x+x-6=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow \underline{x=2} \end{cases} \Rightarrow \underline{y=2}$

Luego $P(2,2)$

$Q \in r$ pues fijamos $x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \underline{Q(1,1) \in r}$

Ahora calculamos $M = t \cap s$

$t: \begin{cases} Q(1,1) \\ t \perp s \Rightarrow \vec{n}_s = \vec{v}_t \Rightarrow \vec{n}_s = (2,1) = \vec{v}_t \Rightarrow \underline{\vec{n}_t = (1,-2)} \end{cases}$

$t: 1 \cdot (x-1) - 2(y-1) = 0 \Rightarrow \underline{x-2y+1=0 : t}$

$M = \begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x+y-6=0 \end{cases} \xrightarrow{(2)} \begin{cases} x-2y=-1 \\ 4x+2y=12 \end{cases} \xrightarrow{+5x} \begin{cases} x-2y=-1 \\ 11 = 11 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \frac{11}{5}}$

$\frac{11}{5} - 2y = -1 \Rightarrow \frac{11}{5} + 1 = 2y \Rightarrow \frac{16}{5} = 2y \Rightarrow \underline{y = \frac{8}{5}}$

$M = (\frac{11}{5}, \frac{8}{5})$ pto medio de $\overline{QQ'}$

$\begin{cases} \frac{11}{5} = \frac{1+x'}{2} \Rightarrow 22 = 5+5x' \Rightarrow 17=5x' \Rightarrow x' = \frac{17}{5} \\ \frac{8}{5} = \frac{1+y'}{2} \Rightarrow 16 = 5+5y' \Rightarrow 11=5y' \Rightarrow y' = \frac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow \underline{Q'(\frac{17}{5}, \frac{11}{5})}$

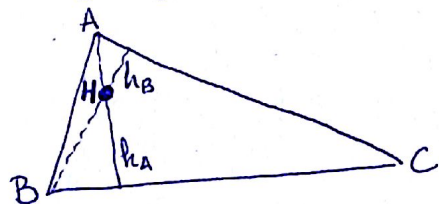
Por último, la recta r' simétrica respecto de s :

$r' \begin{cases} P(2,2) \\ Q'(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_{r'} = \vec{PQ'} = (\frac{17}{5}, \frac{11}{5}) - (2,2) = (\frac{7}{5}, \frac{1}{5}) \parallel (7,1)$

Si $\vec{v}_{r'} = (7,1) \Rightarrow \vec{n}_{r'} = (1,-7)$ y con la ec. normal:

$r': 1 \cdot (x-2) - 7(y-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x-7y+12=0 : r'}$

④ ¿H? $\triangle ABC$ donde $A(2,1)$, $B(-1,0)$ y $C(1,-1)$



$$H = h_A \cap h_B$$

$$h_A \begin{cases} A(2,1) \\ h_A \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{n}_{h_A} = \overrightarrow{BC} = (1,-1) - (-1,0) = (2,-1) \end{cases}$$

Con la ec. normal: $h_A: 2(x-2) - 1(y-1) = 0 \Rightarrow \underline{2x - y - 3 = 0 : h_A}$

$$h_B \begin{cases} B(-1,0) \\ h_B \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}_{h_B} = \overrightarrow{AC} = (1,-1) - (2,1) = (-1,-2) \end{cases}$$

Con la ec. normal: $h_B: -1(x+1) - 2(y-0) = 0 \Rightarrow \underline{-x - 2y - 1 = 0 : h_B}$

El ORTOCENTRO $H = h_A \cap h_B$, para lo que resolvemos el sistema:

$$H \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ -x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(2)} \begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ -2x - 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\oplus \quad \underline{-5y - 5 = 0} \Rightarrow -5 = 5y \Rightarrow \underline{y = -1}$$

Si $y = -1 \Rightarrow 2x - (-1) - 3 = 0 \Rightarrow 2x + 1 - 3 = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \underline{x = 1}$

Luego $\boxed{H = (1, -1)}$