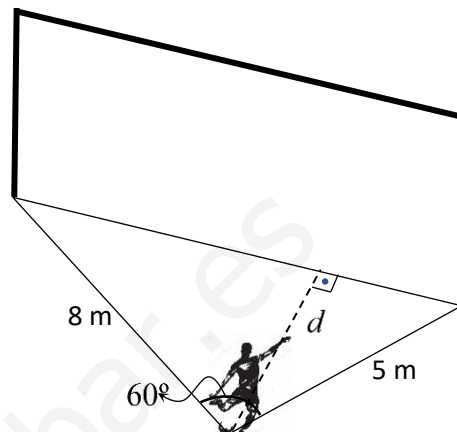


1. **[3 puntos]** Resuelve las tres ecuaciones y la inecuación siguientes:

a) $\log(x+1) - \log x = 1$; b) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{2}$; c) $\frac{24}{x+5} \leq 6 - x$

2. **[1 punto]** En el momento de marcar el último gol de Alemania en la final de la Eurocopa de Inglaterra, Bierhoff estaba situado a 5 metros de uno de los palos y a 8 metros del otro. Desde ese punto, el ángulo con que veía la totalidad de la portería, de un palo al otro, era de 60° . Calcula la distancia d del jugador a la línea de gol (ver figura de la derecha).



3. **[1 punto]** Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\sin x - \frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

4. **[1 punto]** Halla las cuatro raíces cuartas del número complejo

$$z = 4 - 3i, \text{ es decir, hallar } \sqrt[4]{z}.$$

5. Una recta r pasa por los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, -2)$.

- a) **[1 punto]** Hallar la ecuación general de la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2, 3)$.
b) **[0,5 puntos]** Hallar la distancia del punto C a la recta r .

6. **[1 punto]** Calcular, de manera razonada, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2}{-x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^4 - x^2 + 1} - \sqrt{2} x^2 \right)$

7. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$, se pide:

- a) **[0,4 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.
b) **[0,8 puntos]** Asíntotas verticales y horizontales.
c) **[0,3 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Resuelve las tres ecuaciones y la inecuación siguientes:

a) $\log(x+1) - \log x = 1 \Rightarrow \log \frac{x+1}{x} = \log 10 \Rightarrow \frac{x+1}{x} = 10 \Rightarrow x+1 = 10x \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$.

b) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x+1}{2} \Rightarrow \frac{2x}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(x+1)}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2x+2 = \sqrt{x}(x+1) \Rightarrow (2x+2)^2 = [\sqrt{x}(x+1)]^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = x(x+1)^2 \Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = x(x^2 + 2x + 1) \Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = x^3 + 2x^2 + x \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^3 - 2x^2 - 7x - 4 = 0$. Usando la regla de Ruffini se obtiene que -1 es raíz doble y 4 raíz simple del polinomio $x^3 - 2x^2 - 7x - 4$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $x = -1$ y $x = 4$.

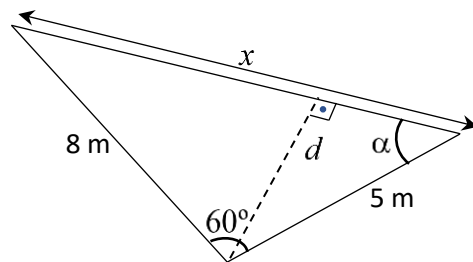
c) $\frac{24}{x+5} \leq 6-x \Rightarrow \frac{24}{x+5} - 6 + x \leq 0 \Rightarrow \frac{24}{x+5} - \frac{6(x+5)}{x+5} + \frac{x(x+5)}{x+5} \leq 0 \Rightarrow \frac{24-6x-30+x^2+5x}{x+5} \leq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{x^2-x-6}{x+5} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+2)(x-3)}{x+5} \leq 0$. Las raíces del numerador son -2 y 3 , y la del denominador -5 .

Elaboremos una tabla:

$(-\infty, -5)$	$(-5, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
-	+	-	+

Por tanto, la solución es $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$.

2. **[1 punto]** En el momento de marcar el último gol de Alemania en la final de la Eurocopa de Inglaterra, Bierhoff estaba situado a 5 metros de uno de los palos y a 8 metros del otro. Desde ese punto, el ángulo con que veía la totalidad de la portería, de un palo al otro, era de 60° . Calcula la distancia d del jugador a la línea de gol.



Lo importante de este problema es el triángulo dibujado "sobre el césped del campo" (ver figura de la derecha).

Por el teorema del coseno: $x^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow x^2 = 64 + 25 - 40 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$.

Por el teorema de los senos: $\frac{7}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{8 \sin 60^\circ}{7} \Rightarrow \sin \alpha = 0,99 \Rightarrow \alpha = 81,8^\circ$.

Entonces $\sin 81,8^\circ = \frac{d}{5} \Rightarrow d = 5 \cdot \sin 81,8^\circ \Rightarrow d = 4,95$ m.

Esto quiere decir que Bierhoff estaba casi en posición perpendicular a uno de los palos, ya que su distancia a la línea de gol (4,95 m) es prácticamente igual a su distancia a uno de los palos (5 m).

3. **[1 punto]** Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\sin x - \frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}\sin^2 x}{2\sqrt{3}\sin x} - \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sin x} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{3}\sin x} \Rightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x - 2\sqrt{3} = 0$$
. El

discriminante de esta ecuación es $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot (-2\sqrt{3}) = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 3 = 1 + 48 = 49$. Entonces:

$$\sin x = \frac{-1 \pm 7}{2 \cdot 2\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{6}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{-8}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \sin x = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$
. Si $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ x = 120^\circ \end{cases}$. Si $\sin x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$, no hay

solución porque $\frac{-2\sqrt{3}}{3} < -1$.

4. [1 punto] Halla las cuatro raíces cuartas del número complejo $z = 4 - 3i$, es decir, hallar $\sqrt[4]{z}$.

Expresemos en primer lugar el número complejo $z = 4 - 3i$ en forma polar:

$$\begin{cases} r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \\ \alpha = \operatorname{arctg} \frac{-3}{4} = 323,13^\circ \end{cases} \quad \text{Entonces } z = 5_{323,13^\circ}$$

Por tanto, $\sqrt[4]{4-3i} = \sqrt[4]{5_{323,13^\circ}} = \sqrt[4]{5}_\beta$. Los valores de β se obtienen por la fórmula $\beta = \frac{323,13^\circ + 360^\circ k}{4}$ donde

k se mueve entre 0 y 3. Así pues, las tres raíces que se piden son $\sqrt[4]{5}_{80,78^\circ}$, $\sqrt[4]{5}_{170,78^\circ}$, $\sqrt[4]{5}_{260,78^\circ}$ y $\sqrt[4]{5}_{350,78^\circ}$.

5. [1 punto] Una recta r pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(4,-2)$.

- a) Hallar la ecuación general de la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2,3)$.

Un vector director de r es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, -4)$. Por tanto, un vector perpendicular suyo será $\vec{n} = (4, 3)$. De

este modo, la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2,3)$ es $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{3}$. Pasando

a general: $3x+6=4y-12 \Rightarrow s \equiv 3x-4y+18=0$.

- b) Hallar la distancia del punto C a la recta r .

La ecuación general de la recta r es $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} \Rightarrow -4x+4=3y-6 \Rightarrow 4x+3y-10=0$.

La distancia del punto C a la recta r es: $d(C, r) = \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-8+9-10|}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5} \text{ u.}$

6. [1 punto] Calcular, **de manera razonada**, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2}{-x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 1} = \left[\frac{0}{0} \text{ INDETERMINACIÓN} \right] = (*)$

Para resolver esta indeterminación hemos de factorizar el polinomio del numerador y el del denominador, usando como factor $x-1$.

Usando la regla de Ruffini se tiene que $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = (x-1)(x^3 - 3x^2 + 4x - 2)$. Y, por otro

lado, tenemos que $-x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(-x^3 + 2x - 1)$. Entonces:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2 + 4x - 2)}{(x-1)(-x^3 + 2x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 2}{-x^3 + 2x - 1} = \left[\frac{0}{0} \text{ INDETERMINACIÓN} \right] = (**)$$

Volviendo a aplicar la regla de Ruffini usando como factor $x-1$ tenemos:

$$(**) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 2)}{(x-1)(-x^2 - x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 2}{-x^2 - x + 1} = \frac{1-2+2}{-1-1+1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^4 - x^2 + 1} - \sqrt{2} x^2) = [\infty - \infty \text{ INDETERMINACIÓN}] =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x^4 - x^2 + 1} - \sqrt{2} x^2)(\sqrt{2x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{2} x^2)}{\sqrt{2x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{2} x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 - x^2 + 1}^2 - (\sqrt{2} x^2)^2}{\sqrt{2x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{2} x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - x^2 + 1 - 2x^4}{\sqrt{2x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{2} x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 1}{\sqrt{2x^4 - x^2 + 1} + \sqrt{2} x^2} = \frac{-1}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}.$$

7. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$, se pide:

a) **[0,4 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Entonces } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}.$$

$$\text{Puntos de corte con el eje } X : f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 0 \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje X son $(0,0)$ y $(2,0)$.

El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x = 0$, con lo que claramente $y = 0$. Entonces, el punto de corte con el eje Y es $(0,0)$ (ya se había obtenido anteriormente).

b) **[0,8 puntos]** Asíntotas verticales y horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}. \text{ De aquí se deduce que } x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{1} = 2. \text{ Por tanto, } y = 2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

c) **[0,3 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.

