1. **[1 punto]** Resolver la siguiente ecuación logarítmica:

$$\log(x-5)-\frac{1}{2}\log(3x-20)=\log 2$$

2. **[1 punto]** El ángulo x es desconocido, pero se sabe que se encuentra en el tercer cuadrante. Se sabe además que $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$. Hallar el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$.

3. **[1 punto]** Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48°. Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14°. Calcular la altura del edificio.

4. **[1 punto]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $[0^{\circ}, 360^{\circ})$.

$$\operatorname{tg} x+2\operatorname{sen} x=0$$

5. **[1 punto]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-3} & \text{si} \quad x\le -2 \\ -x^3+x-7 & \text{si} \quad -2<x<1 \\ \dfrac{3x^2-2}{x} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$, estudiar la continuidad de la función en los puntos $x=-2$ y en $x=1$.

6. **[1 punto]** Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x} \ ; \ \text{b) } \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{x-3}-\frac{x^2-1}{x+3}\right)$$

7. **[2 puntos]** De la función siguiente calcula las asíntotas, los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Represéntala gráficamente.

$$f(x)=\frac{-2x^2}{x^2-2x-8}$$

8. **[2 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

$$\text{a) } f(x)=\ln\sqrt{1-\sqrt{x}} \quad ; \quad \text{b) } f(x)=\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right)$$

Soluciones

1. $\log(x-5)-\frac{1}{2}\log(3x-20)=\log 2 \Rightarrow 2\log(x-5)-\log(3x-20)=2\log 2 \Rightarrow \log\frac{(x-5)^2}{3x-20}=\log 4 \Rightarrow$

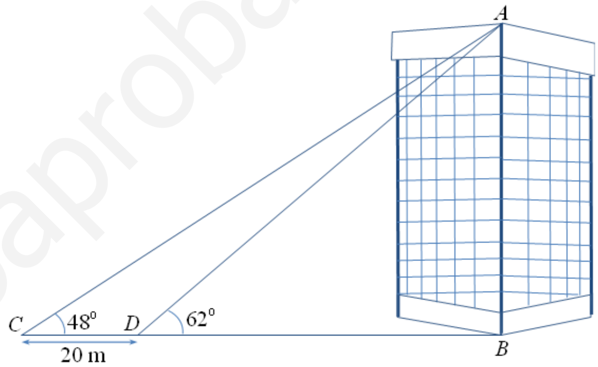
$$\Rightarrow \frac{x^2-10x+25}{3x-20}=4 \Rightarrow x^2-10x+25=12x-80 \Rightarrow x^2-22x-105=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=15 \\ x_2=7 \end{cases}$$

2. $\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Como $\operatorname{tg}^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$, entonces:

$$\frac{5}{4}+1=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{9}{4}=\frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x=\frac{4}{9} \Rightarrow \cos x=-\frac{2}{3}$$

Finalmente como $\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces $\operatorname{sen} x=\operatorname{tg} x\cdot\cos x=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

3. Observando la figura de la derecha es fácil darse cuenta de que el ángulo CDA es $180^\circ-62^\circ=118^\circ$ y que, por tanto, el ángulo CAD es $180^\circ-118^\circ-48^\circ=14^\circ$. Aplicando el teorema de los senos en el triángulo ACD tenemos:



$$\frac{AC}{\operatorname{sen}118^\circ}=\frac{20}{\operatorname{sen}14^\circ} \Rightarrow AC=\frac{20\cdot\operatorname{sen}118^\circ}{\operatorname{sen}14^\circ}\cong 73\,\text{m}.$$

Como $\operatorname{sen}48^\circ=\frac{AB}{AC}$, entonces $AC=AB\cdot\operatorname{sen}48^\circ$, con lo que la altura AB del edificio es: $AC=AB\cdot\operatorname{sen}48^\circ=73\cdot\operatorname{sen}48^\circ\cong 54{,}25\,\text{m}$.

4. $\operatorname{tg} x+2\operatorname{sen} x=0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+2\operatorname{sen} x=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x+2\operatorname{sen} x\cos x=0 \Rightarrow \operatorname{sen} x(1+2\cos x)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x=0 \Rightarrow x=0^\circ\ ;\ x=180^\circ \\ \cos x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=120^\circ\ ;\ x=240^\circ \end{cases}$$

5. $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2+1}{x-3} & \text{si} \quad x\le -2 \\ -x^3+x-7 & \text{si} \quad -2<x<1 \\ \frac{3x^2-2}{x} & \text{si} \quad x\ge 1 \end{cases}$; $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right)=\frac{5}{-5}=-1 \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}\left(-x^3+x-7\right)=-(-8)+(-2)-7=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-1$. Además también $f(-2)=-1$. Por tanto $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=f(-2)=-1$, con lo que f es continua en $x=-2$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^3+x-7\right)=-1+1-7=-7 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{3x^2-2}{x}\right)=\frac{1}{1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, por tanto no existe el límite de la función en $x=1$, con lo que f no es continua en $x=1$. Hay una discontinuidad de salto finito.

6. Límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x^2-x\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}^2}{\left(x^2-x\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{\left(x^2-x\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-3}-\dfrac{x^2-1}{x+3}\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2(x+3)}{(x+3)(x-3)}-\dfrac{\left(x^2-1\right)(x-3)}{(x+3)(x-3)}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2}{(x+3)(x-3)}-\dfrac{x^3-3x^2-x+3}{(x+3)(x-3)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2+x-3}{x^2-9}=6$

7. $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}$. Las soluciones de $x^2-2x-8=0$ son $x=-2$ y $x=4$. Entonces $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}-\{-2\ ,\ 4\}$.

Además es claro que $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=\pm\infty$, por lo que $x=-2$ y $x=4$ son asíntotas verticales.

También es claro que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=-2$, por lo que $y=-2$ es una asíntota horizontal.

La función no tiene asíntotas oblicuas (entre otras cosas porque tiene una horizontal).

$$f'(x)=\frac{-4x\left(x^2-2x-8\right)-\left(-2x^2\right)(2x-2)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{-4x^3+8x^2+32x+4x^3-4x^2}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=$$

$=\dfrac{4x^2+32x}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\dfrac{4x(x+8)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}$. Entonces $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x(x+8)=0\Leftrightarrow x=0\ ;\ x=-8$

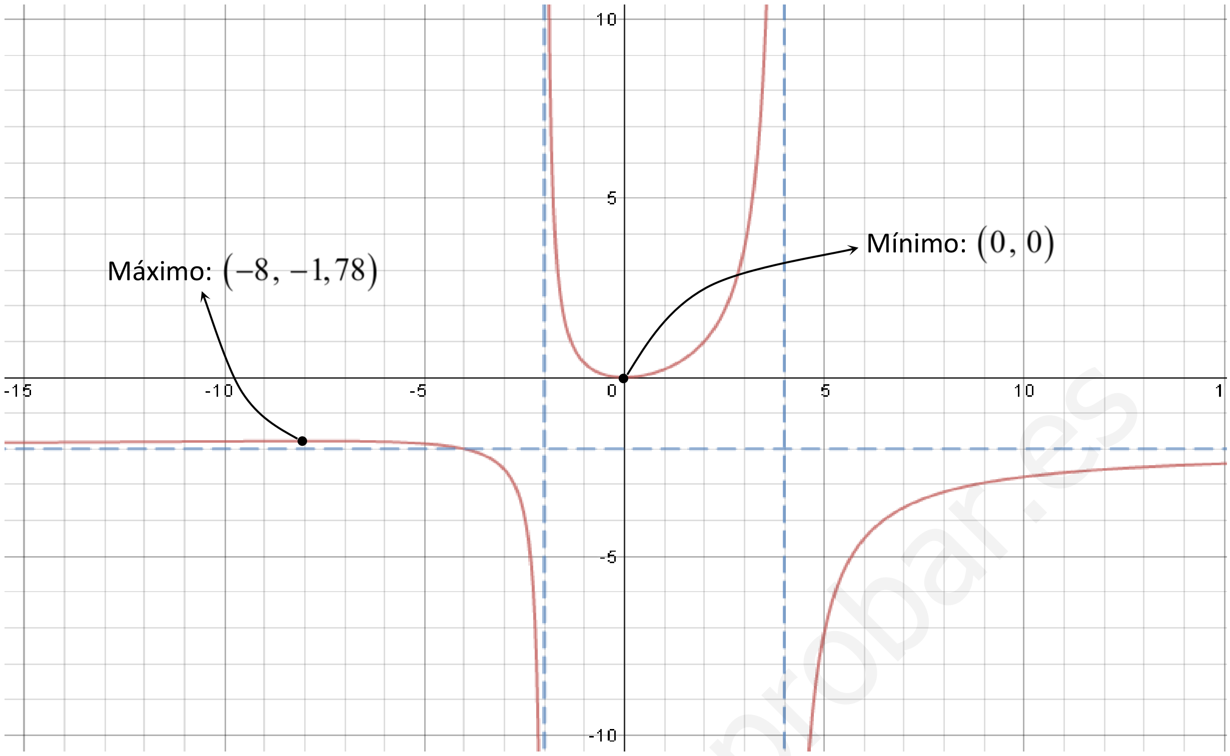
Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos:

	$(-\infty,-8)$	$(-8,-2)$	$(-2,0)$	$(0,4)$	$(4,+\infty)$
Signo de f'	**+**	**–**	**–**	**+**	**+**
Monotonía	↑↑	↓↓	↓↓	↑↑	↑↑

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty,-8)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(-8,-2)\cup(-2,0)$.
- f tiene un máximo relativo en $x=-8$; concretamente el mínimo relativo es $\left(-8,-\dfrac{16}{9}\right)=(-8,1{,}78)$.
- f tiene un mínimo relativo en $x=0$; en concreto el máximo relativo es $(0,0)$.

Representación gráfica:



8. Cálculo de derivadas.

a) $f(x)=\ln\sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}}\cdot\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{-1}{4\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$

Así está bien, aunque también se puede expresar la derivada de la siguiente manera:

$$f'(x)=\frac{-1}{4\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}=\frac{-1}{4\sqrt{x}-4x}=\frac{-1\left(4\sqrt{x}+4x\right)}{\left(4\sqrt{x}-4x\right)\left(4\sqrt{x}+4x\right)}=\frac{-4\sqrt{x}-4x}{16x-16x^2}=\frac{-\sqrt{x}-x}{4x-4x^2}=\frac{x+\sqrt{x}}{4x^2-4x}$$

Hay otra forma de hacer la derivada, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$f(x)=\ln\sqrt{1-\sqrt{x}}=\ln\left(1-\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(1-\sqrt{x}\right)$$

Entonces: $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{-1}{4\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}$

b) $f(x)=\ln\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}}\cdot\dfrac{\cos x\cdot e^x-\operatorname{sen} x\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=\dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}\cdot\dfrac{e^x\left(\cos x-\operatorname{sen} x\right)}{\left(e^x\right)^2}=$

$$=\frac{\left(e^x\right)^2\left(\cos x-\operatorname{sen} x\right)}{\operatorname{sen} x\left(e^x\right)^2}=\frac{\cos x-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}=\operatorname{ctg} x-1$$

Hay otra forma de hacer la derivada, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$f(x)=\ln\left(\frac{\operatorname{sen} x}{e^x}\right)=\ln\left(\operatorname{sen} x\right)-\ln e^x=\ln\left(\operatorname{sen} x\right)-x$$

Entonces: $f'(x)=\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x-1=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-1=\operatorname{ctg} x-1$