

1. **[2 puntos]** Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } x + \frac{2+x}{x-1} = 6 \quad ; \quad \text{b) } \log(x-5) - \frac{1}{2} \log(3x-20) = \log 2$$

2. **[1 punto]** Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48° . Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14° . Calcular la altura del edificio.

3. **[1 punto]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica: $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{sen} x = 0$

4. **[1 punto]** Calcular las tres raíces cúbicas del número complejo $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5. **[1 punto]** Calcula los valores de a y b para que las rectas $r \equiv ax + 3y + 6 = 0$ y $s \equiv bx - 2y - 1 = 0$ sean perpendiculares y la recta r pasa por el punto $A(3, 4)$.

6. **[1 punto]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-3} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^3 + x - 7 & \text{si } -2 < x < 1 \\ \frac{3x^2-2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, estudiar la continuidad de la función en los

puntos $x = -2$ y en $x = 1$.

7. **[1 punto]** Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x} \quad ; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - \frac{x^2-1}{x+3} \right)$$

8. Dada la función $f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8}$, se pide:

- a) **[0,6 puntos]** Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.
b) **[0,4 puntos]** Representación gráfica aproximada.
c) **[1 punto]** Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x = -1$.

Soluciones

$$1. \text{ a) } x + \frac{2+x}{x-1} = 6 \Rightarrow x(x-1) + 2 + x = 6(x-1) \Rightarrow x^2 - x + 2 + x = 6x - 6 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \log(x-5) - \frac{1}{2} \log(3x-20) = \log 2 \Rightarrow 2 \log(x-5) - \log(3x-20) = 2 \log 2 \Rightarrow \log \frac{(x-5)^2}{3x-20} = \log 4 \Rightarrow$$

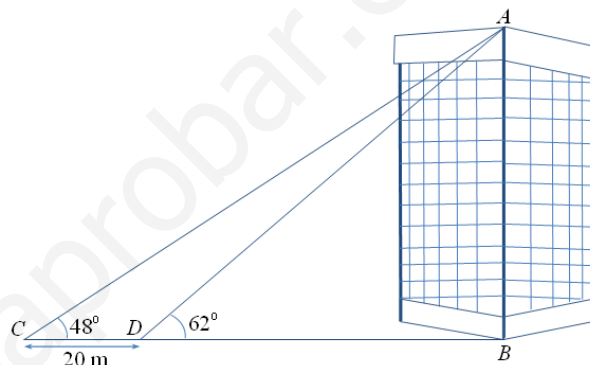
$$\Rightarrow \frac{x^2 - 10x + 25}{3x - 20} = 4 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 12x - 80 \Rightarrow x^2 - 22x - 105 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

2. Observando la figura de la derecha es fácil darse cuenta de que el ángulo CDA es $180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$ y que, por tanto, el ángulo CAD es $180^\circ - 118^\circ - 48^\circ = 14^\circ$. Aplicando el teorema de los senos en el triángulo ACD tenemos:

$$\frac{AC}{\sin 118^\circ} = \frac{20}{\sin 14^\circ} \Rightarrow AC = \frac{20 \cdot \sin 118^\circ}{\sin 14^\circ} \cong 73 \text{ m.}$$

Como $\sin 48^\circ = \frac{AB}{AC}$, entonces $AC = AB \cdot \sin 48^\circ$, con lo

que la altura AB del edificio es: $AC = AB \cdot \sin 48^\circ = 73 \cdot \sin 48^\circ \cong 54,25 \text{ m.}$



$$3. \text{ tg } x + 2 \sin x = 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + 2 \sin x = 0 \Rightarrow \sin x + 2 \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x (1 + 2 \cos x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ ; x = 180^\circ \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 120^\circ ; x = 240^\circ \end{cases}$$

$$4. \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \left[\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1 \\ \theta &= \arctg \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = \arctg(-1) = 315^\circ \end{aligned} \right] = 1_{315^\circ}.$$

Entonces $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i} = \sqrt[3]{1_{315^\circ}} = 1_\alpha$. Los valores de α se obtienen mediante la fórmula $\alpha = \frac{315^\circ + 360^\circ k}{3}$,

donde k se mueve entre 0 y 2. Por tanto, las tres raíces que se piden son: $r_1 = 1_{105^\circ}$, $r_2 = 1_{225^\circ}$, $r_3 = 1_{345^\circ}$.

5. Como la recta $r \equiv ax + 3y + 6 = 0$ pasa por el punto $A(3,4)$, tenemos $3a + 12 + 6 = 0 \Rightarrow 3a = -18 \Rightarrow a = -6$.

Así, la recta r tiene ecuación $r \equiv -6x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow r \equiv 2x - y - 2 = 0$. Un vector director suyo es $\vec{u} = (1, 2)$.

Por otro lado, un vector director de la recta $s \equiv bx - 2y - 1 = 0$ es $\vec{v} = (2, b)$. Puesto que las rectas son perpendiculares también lo son sus vectores directores, con lo que su producto escalar será igual a cero. De aquí se obtiene el valor de b : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1, 2) \cdot (2, b) = 0 \Rightarrow 2 + 2b = 0 \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$.

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-3} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^3+x-7 & \text{si } -2 < x < 1; \\ \frac{3x^2-2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{x^2+1}{x-3} \right) = \frac{5}{-5} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^3+x-7) = -(-8)+(-2)-7 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$. Además, también $f(-2) = -1$. Por tanto $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = -1$, con lo que f es continua en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^3+x-7) = -1+1-7 = -7 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3x^2-2}{x} \right) = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \text{ por tanto, no existe el límite de la}$$

función en $x = 1$, con lo que f no es continua en $x = 1$. Hay una discontinuidad de salto finito.

7. Límites.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{(x^2 - x)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}^2}{(x^2 - x)(x + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x^2 - x)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + \sqrt{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - \frac{x^2-1}{x+3} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2(x+3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{(x^2-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+3x^2}{(x+3)(x-3)} - \frac{x^3-3x^2-x+3}{(x+3)(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+x-3}{x^2-9} = 6 \end{aligned}$$

$$8. \quad f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8}.$$

a) Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

Las soluciones de $x^2 - 2x - 8 = 0$ son $x = -2$ y $x = 4$. Entonces $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$.

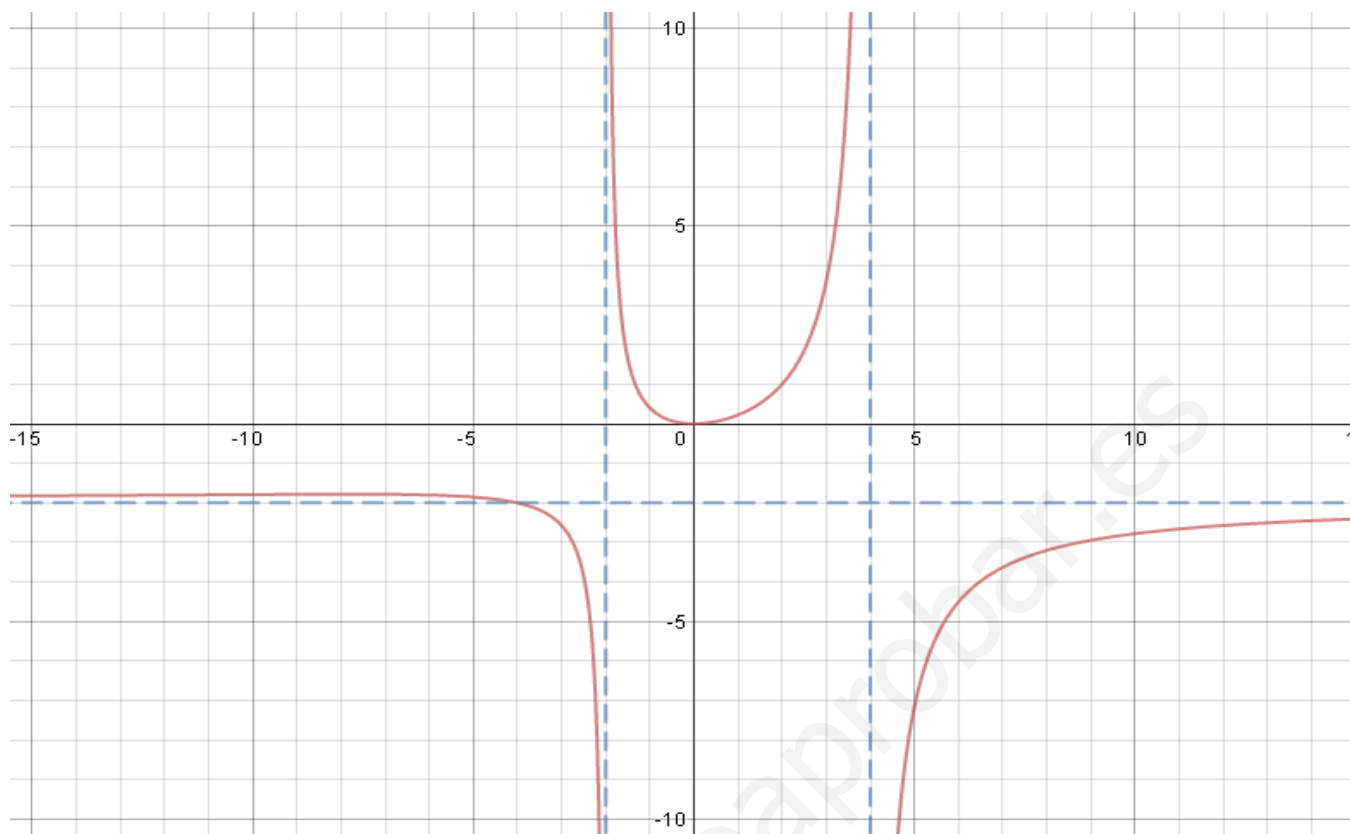
$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases} \text{ y } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 4^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 4^+ \end{cases}, \text{ resulta que las rectas}$$

$x = -2$ y $x = 4$ son asíntotas verticales.

También se tiene que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = -2$, por lo que $y = -2$ es una asíntota horizontal.

Como la función tiene una asíntota horizontal, no tiene asíntotas oblicuas.

b) Representación gráfica.



c) Ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $x = -1$.

La ecuación de la recta tangente en el punto $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$.

La imagen de -1 es $f(-1) = \frac{-2(-1)^2}{(-1)^2 - 2(-1) - 8} = \frac{-2}{1 + 2 - 8} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$.

La derivada de f es:

$$f'(x) = \frac{-4x(x^2 - 2x - 8) - (-2x^2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-4x^3 + 8x^2 + 32x + 4x^3 - 4x^2}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{4x^2 + 32x^2}{(x^2 - 2x - 8)^2}.$$

Por tanto, la derivada de f en -1 es $f'(-1) = \frac{4(-1)^2 + 32(-1)}{((-1)^2 - 2(-1) - 8)^2} = \frac{4 - 32}{(1 + 2 - 8)^2} = \frac{-28}{(-5)^2} = -\frac{28}{25}$.

Así pues, la recta tangente en el punto $x = -1$ es $y - \frac{2}{5} = -\frac{28}{25}(x + 1)$.