

1. **[0,5 puntos]** Opera, simplifica y racionaliza la siguiente expresión con radicales: $\frac{(\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}}$
2. **[0,5 puntos]** Resuelve la siguiente inecuación y escribe la solución en forma de intervalo: $\left| \frac{8x-12}{3} \right| \leq 1$
3. **[2 puntos]** Resuelve las tres ecuaciones y la inecuación siguientes:
 - a) $\sqrt{28+2x} = 4 + \sqrt{x}$; b) $\log 2 + \log(x-3) = \frac{1}{2} \log(2x)$; c) $2^{x+1} + 4^x = 80$; d) $\frac{2x-1}{x+2} \geq 1$
4. **[1 punto]** Una parcela tiene forma triangular, dos de cuyos lados miden 46 y 56 metros. Si el ángulo que comprendido entre ellos es de 36° , encuentra la longitud del tercer lado y la medida de los otros dos ángulos del triángulo.
5. **[1 punto]** Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $\sin x + 2 \cos 2x = \frac{3}{2}$.
6. **[1 punto]** Calcula el valor de x para que el cociente $\frac{x-\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}$ sea un número complejo imaginario puro (es decir, un número complejo cuya parte real es cero).
7. Una recta r pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(4,-2)$.
 - a) **[1 punto]** Hallar la ecuación general de la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2,3)$.
 - b) **[0,5 puntos]** Hallar la distancia del punto C a la recta r .
8. **[1 punto]** Calcular, de manera razonada, los siguientes límites:
 - a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3} - x}$
9. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 2}$, se pide:
 - a) **[0,4 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.
 - b) **[0,8 puntos]** Asíntotas verticales y horizontales.
 - c) **[0,3 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.

1. [0,5 puntos] Opera, simplifica y racionaliza la siguiente expresión con radicales:

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{2}-1)(1-\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}-2-1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-3}{2+\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}-3)(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2}-4-6+3\sqrt{2}}{2^2-\sqrt{2}^2} = \\ &= \frac{7\sqrt{2}-10}{4-2} = \frac{7\sqrt{2}-10}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2} - 5.\end{aligned}$$

2. [0,5 puntos] Resuelve la siguiente inecuación y escribe la solución en forma de intervalo:

$$\begin{aligned}\left| \frac{8x-12}{3} \right| \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq \frac{8x-12}{3} \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 8x-12 \leq 3 \Rightarrow -3+12 \leq 8x-12+12 \leq 3+12 \Rightarrow \\ 9 \leq 8x \leq 15 &\Rightarrow \frac{9}{8} \leq x \leq \frac{15}{8}.\end{aligned}$$

Por tanto, la solución es el intervalo $\left[\frac{9}{8}, \frac{15}{8} \right]$.

3. [2 puntos] Resuelve las tres ecuaciones y la inecuación siguientes:

a) $\sqrt{28+2x} = 4 + \sqrt{x} \Rightarrow 28+2x = 16+8\sqrt{x}+x \Rightarrow 12+x = 8\sqrt{x} \Rightarrow 144+24x+x^2 = 64x \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 - 40x + 144 = 0$, ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $x = 36$ y $x = 4$, las cuales se puede comprobar que son soluciones de la ecuación original.

b) $\log 2 + \log(x-3) = \frac{1}{2} \log(2x) \Rightarrow \log \frac{2}{x-3} = \frac{1}{2} \log(2x) \Rightarrow 2 \log \frac{2}{x-3} = \log(2x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow \log \left(\frac{2}{x-3} \right)^2 = \log(2x) \Rightarrow \left(\frac{2}{x-3} \right)^2 = 2x \Rightarrow \frac{4}{x^2-6x+9} = 2x \Rightarrow 2x^3 - 12x^2 + 18x - 4 = 0.$

Usando la regla de Ruffini: $2x^3 - 12x^2 + 18x - 4 = (x-2)(2x^2 - 8x + 2)$. Por tanto, una solución de la ecuación es $x = 2$. Las otras se obtienen de la resolución de la ecuación $2x^2 - 8x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$ cuyo discriminante es $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 16 - 4 = 12$. Entonces $x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Por tanto, las otras dos soluciones son $x = 2 + \sqrt{3}$ y $x = 2 - \sqrt{3}$.

c) $2^{x+1} + 4^x = 80 \Rightarrow 2^x \cdot 2 + (2^x)^2 = 80$. Llamando $2^x = z$, la ecuación se convierte en $2z + z^2 = 80 \Rightarrow$
 $\Rightarrow z^2 + 2z - 80 = 0$, ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $z = -10$ y $z = 8$. Entonces, si $z = -10 \Rightarrow 2^x = -10$, que no tiene solución porque $2^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Si $z = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$.

d) $\frac{2x-1}{x+2} \geq 1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-1-x-2}{x+2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x+2} \geq 0$. La raíz del numerador es 3, y la del denominador -2. Elaboremos una tabla:

$(-\infty, -2)$	$(-2, 3)$	$(3, +\infty)$
+	-	+

Por tanto, la solución es $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

4. **[1 punto]** Una parcela tiene forma triangular, dos de cuyos lados miden 46 y 56 metros. Si el ángulo que comprendido entre ellos es de 36° , encuentra la longitud del tercer lado y la medida de los otros dos ángulos del triángulo.

El lado desconocido lo podemos hallar usando el teorema del coseno:

$$x^2 = 46^2 + 56^2 - 2 \cdot 46 \cdot 56 \cdot \cos 36^\circ \Rightarrow x^2 = 2116 + 3136 - 4168,06 \Rightarrow$$

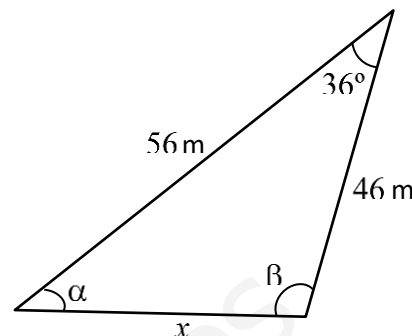
$$\Rightarrow x^2 = 1083,94 \Rightarrow x = 32,92 \text{ m.}$$

Ahora, usando el teorema de los senos, podemos hallar el ángulo α

$$\frac{46}{\sin \alpha} = \frac{32,92}{\sin 36^\circ} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{46 \cdot \sin 36^\circ}{32,92} \Rightarrow \sin \alpha = 0,82 \Rightarrow \alpha = 55,22^\circ.$$

Como los tres ángulos suman 180° , tenemos:

$$36^\circ + 55,22^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 36^\circ - 55,22^\circ \Rightarrow \beta = 88,78^\circ.$$



5. **[1 punto]** Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\sin x + 2 \cos 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2} \Rightarrow \sin x + 2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x + 2 - 4\sin^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\sin x + 4 - 8\sin^2 x = 3 \Rightarrow 8\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0. \text{ Esta es una ecuación de}$$

segundo grado en $\sin x$, cuyo discriminante es $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1) = 4 + 32 = 36$. Entonces:

$$\sin x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 8} = \frac{2 \pm 6}{16} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ, x = 150^\circ \\ \sin x = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = 194,48^\circ, x = 345,42^\circ \end{cases}$$

6. **[1 punto]** Calcula el valor de x para que el cociente $\frac{x - \sqrt{2}i}{\sqrt{2} - i}$ sea un número complejo imaginario puro (es decir, un número complejo cuya parte real es cero).

Pasemos el número complejo a binómica:

$$\begin{aligned} \frac{x - \sqrt{2}i}{\sqrt{2} - i} &= \frac{(x - \sqrt{2}i)(\sqrt{2} + i)}{(\sqrt{2} - i)(\sqrt{2} + i)} = \frac{\sqrt{2}x + xi - 2i - \sqrt{2}i^2}{\sqrt{2}^2 - i^2} = \frac{\sqrt{2}x + xi - 2i - \sqrt{2}(-1)}{2 - (-1)} = \frac{\sqrt{2}x + xi - 2i + \sqrt{2}}{3} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(x+1) + (x-2)i}{3} = \frac{\sqrt{2}(x+1)}{3} + \frac{x-2}{3}i. \end{aligned}$$

Ahora igualamos la parte real a cero y resolvemos la ecuación:

$$\frac{\sqrt{2}(x+1)}{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{2}(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

7. **[1 punto]** Una recta r pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(4,-2)$.

a) Hallar la ecuación general de la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2,3)$.

Un vector director de r es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, -4)$. Por tanto, un vector perpendicular suyo será $\vec{n} = (4, 3)$. De

este modo, la recta s perpendicular a la recta r que pasa por el punto $C(-2,3)$ es $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{3}$. Pasando

a general: $3x+6 = 4y-12 \Rightarrow s \equiv 3x-4y+18 = 0$.

b) Hallar la distancia del punto C a la recta r .

La ecuación general de la recta r es $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} \Rightarrow -4x+4=3y-6 \Rightarrow 4x+3y-10=0$.

La distancia del punto C a la recta r es: $d(C,r) = \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-8+9-10|}{\sqrt{25}} = \frac{9}{5}$ u.

8. [1 punto] Calcular, de manera razonada, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0} \text{ INDETERMINACIÓN} \right] = (*)$

Para resolver esta indeterminación hemos de factorizar el polinomio del numerador y el del denominador, usando como factor $x-2$.

Usando la regla de Ruffini se tiene que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2)$. Y, por otro lado, tenemos que

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$. Entonces:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3} - x} = \left[\frac{1}{\infty - \infty} \text{ INDETERMINACIÓN} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot (\sqrt{x+3} + x)}{(\sqrt{x+3} - x)(\sqrt{x+3} + x)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} + x}{\sqrt{x+3}^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} + x}{x+3-x^2} = 0$, ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

9. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 2}$, se pide:

a) [0,4 puntos] Dominio y puntos de corte con los ejes.

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Entonces } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}.$$

$$\text{Puntos de corte con el eje } X : f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje X son $(0,0)$ y $(1,0)$.

El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x=0$, con lo que claramente $y=0$. Entonces, el punto de corte con el eje Y es $(0,0)$ (ya se había obtenido anteriormente).

b) [0,8 puntos] Asíntotas verticales y horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{2}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases}. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{2}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$$

De aquí se deduce que $x=-1$ y $x=2$ son asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{1} = 1. \text{ Por tanto, } y=1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

c) **[0,3 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.

