

1. **[2 puntos]** Hallar el punto simétrico del punto $A(-4, 2)$ respecto del punto $B(2, -1)$. Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por los tres puntos anteriores.
2. **[1 punto]** Calcular la ecuación general de la recta s que es perpendicular a la recta $r \equiv 2x - y + 1 = 0$ y pasa por el punto $A(1, -1)$.
3. Dadas las rectas $r \equiv -x - y + 3 = 0$ y $s \equiv x + 2y + 1 = 0$, hallar:
 - a) **[1 punto]** El punto P de corte de ambas rectas y el ángulo α que forman.
 - b) **[1 punto]** La ecuación general de la recta t paralela a r que pasa por el punto $A(-2, 1)$. ¿Cuál es la distancia de t a r ?
4. **[1 punto]** Dada la siguiente función definida por trozos, estudiar de manera razonada la continuidad en los puntos $x = -2$ y $x = 2$. Caso de no ser continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{4} & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 5 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{x+1} - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

5. **[2 puntos]** Calcular, de manera razonada, los siguientes límites (indica, en su caso, el tipo de indeterminación existente):
 - a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^3 + 6x + 4}{x^4 - 4x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x}{x-1} - x \right)$
6. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$, se pide:
 - a) **[0,6 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.
 - b) **[0,8 puntos]** Asíntotas verticales y horizontales.
 - c) **[0,6 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Hallar el punto simétrico del punto $A(-4, 2)$ respecto del punto $B(2, -1)$. Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por los tres puntos anteriores.

Llamemos $S(x, y)$ al punto simétrico de $A(-4, 2)$ respecto del punto $B(2, -1)$. Entonces:

$$B = \frac{A+S}{2} \Rightarrow (2, -1) = \left(\frac{-4+x}{2}, \frac{2+y}{2} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-4+x}{2} \Rightarrow 4 = -4+x \Rightarrow x=8 \\ -1 = \frac{2+y}{2} \Rightarrow -2 = 2+y \Rightarrow y=-4 \end{cases} \quad \text{. Por tanto, el punto simétrico}$$

del punto $A(-4, 2)$ respecto del punto $B(2, -1)$ es $S(8, -4)$.

Los tres puntos anteriores están alineados. Así que basta que hallemos la recta que pasa por A y por B , cuyo vector director es $\vec{u} = B - A \Rightarrow \vec{u} = (6, -3)$. La ecuación en forma continua es $\frac{x+4}{6} = \frac{y-2}{-3}$.

2. **[1 punto]** Calcular la ecuación general de la recta s que es perpendicular a la recta $r \equiv 2x - y + 1 = 0$ y pasa por el punto $A(1, -1)$.

Un vector normal o perpendicular a la recta r es $\vec{n} = (2, -1)$. Por tanto, la ecuación continua de la recta s perpendicular a r que pasa por el punto $A(1, -1)$ es $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1}$. Multiplicando en cruz pasamos a forma general: $-x+1=2y+2 \Rightarrow s \equiv x+2y+1=0$.

3. Dadas las rectas $r \equiv -x - y + 3 = 0$ y $s \equiv x + 2y + 1 = 0$, hallar:

- a) **[1 punto]** El punto P de corte de ambas rectas y el ángulo α que forman.

Para hallar el punto P de corte de ambas rectas resolvemos el sistema $\begin{cases} -x - y + 3 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$. Sumando ambas

ecuaciones tenemos: $y+4=0 \Rightarrow y=-4$. Sustituyendo en la segunda ecuación: $x-8+1=0 \Rightarrow x=7$. Por tanto, el punto de corte de ambas rectas es $P(7, -4)$.

Un vector director de r es $\vec{u} = (1, -1)$ y un vector director de s es $\vec{v} = (-2, 1)$. Por tanto:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 18,43^\circ$$

- b) **[1 punto]** La ecuación general de la recta t paralela a r que pasa por el punto $A(-2, 1)$. ¿Cuál es la distancia de t a r ?

Ya hemos visto que un vector director de r es $\vec{u} = (1, -1)$. Por tanto, la recta t paralela a r que pasa por el punto $A(-2, 1)$ es $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow -x-2=y-1 \Rightarrow t \equiv x+y+1=0$.

La distancia de t a r es, por ser paralelas, la misma que la distancia de $A(-2, 1)$ (un punto de t) a r :

$$d(A, r) = \frac{|(-1) \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{|2-1+3|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

4. **[1 punto]** Dada la siguiente función definida por trozos, estudiar de manera razonada la continuidad en los puntos $x = -2$ y $x = 2$. Caso de no ser continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{4} & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 5 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{3}{x+1} - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2-x}{4} = \frac{2-(-2)}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^2 + 5) = -(-2)^2 + 5 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1 = f(-2) \Rightarrow f \text{ es continua en } x = -2.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 5) = -2^2 + 5 = -4 + 5 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3}{x+1} - 2 \right) = \frac{3}{2+1} - 2 = 1 - 2 = -1 \end{aligned} \right\} \text{ . Por ser los límites laterales distintos, no existe}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, con lo que f no es continua en $x = 2$. Puesto que ambos límites laterales son finitos, en $x = 2$ la función presenta una discontinuidad de salto finito.

5. **[2 puntos]** Calcular, de manera razonada, los siguientes límites (indica, en su caso, el tipo de indeterminación existente):

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^3 + 6x + 4}{x^4 - 4x^2} = \left[\frac{0}{0} \text{ INDETERMINACIÓN} \right] = (*)$

Para resolver esta indeterminación hemos de factorizar el polinomio del numerador y el del denominador, usando como factor $x + 2$. Usando la regla de Ruffini se tiene que $-x^3 + 6x + 4 = (x + 2)(-x^2 + 2x + 2)$. Y, por otro lado, tenemos que $x^4 - 4x^2 = (x + 2)(x^3 - 2x^2)$. Entonces:

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(-x^2+2x+2)}{(x+2)(x^3-2x^2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2+2x+2}{x^3-2x^2} = \frac{-(-2)^2+2(-2)+2}{(-2)^3-2(-2)^2} = \frac{-4-4+2}{-8-8} = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x}{x-1} - x \right) = \left[\infty - \infty \text{ INDETERMINACIÓN} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2+x}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{1} = 2$ (como los polinomios son del mismo grado se dividen los coeficientes líderes).

6. Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$, se pide:

- a) **[0,6 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Entonces } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}.$$

$$\text{Puntos de corte con el eje } X. f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 0 \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte con el eje X son $(0,0)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

El punto de corte con el eje Y se obtiene haciendo $x = 0$, con lo que claramente $y = 0$. Entonces, el punto de corte con el eje Y es $(0,0)$ (ya se había obtenido anteriormente).

b) **[0,8 puntos]** Asíntotas verticales y horizontales.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases}. \text{ De aquí se deduce que } x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{1} = 2. \text{ Por tanto, } y = 2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

c) **[0,6 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.

