

1. **[3 puntos; 1 punto por apartado]** Contesta a las siguientes cuestiones.
 - a) Hallar las ecuaciones continua y general de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-4, 1)$.
 - b) Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2, 4)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv -x + 3y + 5 = 0$.
 - c) Halla el ángulo formado por las rectas $r \equiv y = -\frac{3}{2}x + 1$ y $s \equiv -2x + y + 3 = 0$.
2. **[1 punto]** Hallar la ecuación general de una recta s , paralela a $r \equiv 2x - y + 1 = 0$, que se encuentre a una distancia de 2 unidades de esta última. **Nota:** hay dos soluciones.
3. **[1 punto]** Calcula el valor de k para que la recta $x + y = k$ forme con los ejes de coordenadas un triángulo cuya área sea de 8 uds². **Nota:** hay dos soluciones.
4. **[1 punto]** Hallar la ecuación de una recta r que forme con el eje X un ángulo de 30° y cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a 3 unidades. **Pista:** $\operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}/3$. **Nota:** hay dos soluciones.
5. **[2 puntos]** Un triángulo isósceles ABC tiene por lado desigual el segmento que une los puntos $A(-1, 7)$ y $B(5, 3)$. El vértice C está situado sobre la recta $2x + y - 16 = 0$. Halla las coordenadas de este vértice y el área del triángulo.
6. **[1 punto]** Hallar el dominio de las siguientes funciones.
 - a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 10}$
 - b) $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x+3}}$
7. **[2 puntos]** Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos. Basándote en la gráfica, estudia la continuidad de la misma.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \frac{-2x}{-x+4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Soluciones

1. [3 puntos; 1 punto por apartado] Contesta a las siguientes cuestiones.

a) Hallar las ecuaciones continua y general de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-4, 1)$.

$$\text{Continua: } \frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-(-3)}{1-(-3)} \Rightarrow \frac{x-2}{-6} = \frac{y+3}{4}.$$

$$\text{General: } 4(x-2) = -6(y+3) \Rightarrow 4x-8 = -6y-18 \Rightarrow 4x+6y+10=0 \Rightarrow 2x+3y+5=0.$$

b) Calcula la ecuación general de la recta que pasa por el punto $A(2, 4)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv -x+3y+5=0$.

Un vector perpendicular a la recta r es $\vec{v} = (-1, 3)$. Por tanto, la recta que se pide es

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-4}{3} \Rightarrow 3(x-2) = -1(y-4) \Rightarrow 3x-6 = -y+4 \Rightarrow 3x+y-10=0.$$

c) Halla el ángulo formado por las rectas $r \equiv y = -\frac{3}{2}x+1$ y $s \equiv -2x+y+3=0$.

Llamemos α al ángulo que forman r y s . La ecuación general de la recta r es $r \equiv 3x+2y-2=0$. Un vector director de r es $\vec{u} = (-2, 3)$. Y un vector director de s es $\vec{v} = (-1, -2)$. Por tanto:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|(-2)(-1) + 3(-2)|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2} \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|2-6|}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{|-4|}{\sqrt{65}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{4}{\sqrt{65}} = 60,26^\circ.$$

2. [1 punto] Hallar la ecuación general de una recta s , paralela a $r \equiv 2x-y+1=0$, que se encuentre a una distancia de 2 unidades de esta última. **Nota:** hay dos soluciones.

La ecuación general de la recta s , por ser paralela a r , debe ser de la forma $s \equiv 2x-y+C=0$. La distancia de r a s coincidirá con la distancia de un punto cualquiera de r a s . Un punto de r es, por ejemplo, $P(0, 1)$. Así:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + C|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|C-1|}{\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow |C-1| = 2\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} C-1 = 2\sqrt{5} \Rightarrow C = 1+2\sqrt{5} \\ C-1 = -2\sqrt{5} \Rightarrow C = 1-2\sqrt{5} \end{cases}$$

Por tanto, hay dos posibilidades para la recta s : $s \equiv 2x-y+1+2\sqrt{5}=0$, $s \equiv 2x-y+1-2\sqrt{5}=0$.

3. [1 punto] Calcula el valor de k para que la recta $x+y=k$ forme con los ejes de coordenadas un triángulo cuya área sea de 8 uds². **Nota:** hay dos soluciones.

La recta corta al eje X en el punto $A(k, 0)$ y al eje Y en el punto $B(0, k)$. Los vértices del triángulo serán entonces A , B y O , donde $O(0, 0)$ es el origen de coordenadas. El triángulo entonces es rectángulo y su área

$$\text{será: } \frac{|k| \cdot |k|}{2} = \frac{k^2}{2}. \text{ Por tanto, } \frac{k^2}{2} = 8 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = \sqrt{16} \Rightarrow \begin{cases} k = -4 \\ k = 4 \end{cases}$$

4. [1 punto] Hallar la ecuación de una recta r que forme con el eje X un ángulo de 30° y cuya distancia al origen de coordenadas sea igual a 3 unidades. **Pista:** $\text{tg } 30^\circ = \sqrt{3}/3$. **Nota:** hay dos soluciones.

Si m es la pendiente de la recta tenemos que $m = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{u_2}{u_1}$. Entonces la ecuación general de la recta r

la podemos escribir así: $r \equiv \sqrt{3}x-3y+C=0$. Como la distancia al origen $O(0, 0)$ es de 3 unidades tenemos:

$$d(r, O) = \frac{|C|}{\sqrt{3+9}} = 3 \Rightarrow |C| = 3\sqrt{12} = 6\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} C = 6\sqrt{3} \\ C = -6\sqrt{3} \end{cases}. \text{ Por tanto: } \begin{cases} r \equiv \sqrt{3}x-3y+6\sqrt{3}=0 \\ r \equiv \sqrt{3}x-3y-6\sqrt{3}=0 \end{cases}$$

5. **[2 puntos]** Un triángulo isósceles ABC tiene por lado desigual el segmento que une los puntos $A(-1,7)$ y $B(5,3)$. El vértice C está situado sobre la recta $2x + y - 16 = 0$. Halla las coordenadas de este vértice y el área del triángulo.

Despejando y en la ecuación de la recta tenemos que $y = -2x + 16$. Entonces, cualquier punto C de la recta se puede escribir así: $C(x, -2x + 16)$. Puesto que el triángulo ABC es isósceles y el lado desigual es el lado AB , los lados iguales son AC y BC . Es decir, debe darse la igualdad $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$. Los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ son $\overrightarrow{AC} = (x+1, -2x+9)$ y $\overrightarrow{BC} = (x-5, -2x+13)$. Entonces tenemos:

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (-2x+9)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (-2x+13)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 36x + 81 = x^2 - 10x + 25 + 4x^2 - 52x + 169 \Rightarrow -34x + 82 = -62x + 194 \Rightarrow x = 4$$

Por tanto, el vértice C es $C(4, -2 \cdot 4 + 16) \Rightarrow C(4, 8)$.

Si llamamos M al punto medio de A y B , el área del triángulo será igual a la base del triángulo $|\overrightarrow{AB}|$, por la altura $|\overrightarrow{MC}|$, dividido entre dos. El punto medio de A y B es $M(2, 5)$. Por tanto, el área del triángulo es:

$$\frac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{MC}|}{2} = \frac{|(6, -4)| \cdot |(2, 3)|}{2} = \frac{\sqrt{36+16} \cdot \sqrt{4+9}}{2} = \frac{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}}{2} = \frac{\sqrt{13^2 \cdot 2^2}}{2} = \frac{13 \cdot 2}{2} = 13 \text{uds}^2$$

Otra forma de hallar el vértice C es obtener la recta perpendicular al lado AB que pasa por su punto medio M (altura correspondiente al lado AB):

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-5}{6} \Rightarrow 6x - 12 = 4y - 20 \Rightarrow 6x - 4y + 8 = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 4 = 0$$

El vértice C será el corte de esta última recta y la recta que nos dan en el enunciado. Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - 16 = 0 \\ 3x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 32 = 0 \\ 3x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow 7x - 28 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 8. \text{ Por tanto, } C(4, 8).$$

6. **[1 punto]** Hallar el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x - 10}$

Igualamos el denominador a cero: $x^2 - 3x - 10 = 0$. Las soluciones de la ecuación de segundo grado anterior son $x = -2$ y $x = 5$. Por tanto: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 5\}$.

b) $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x+3}}$

El dominio serán todos los números reales que verifique la inecuación $\frac{x}{x+3} \geq 0$.

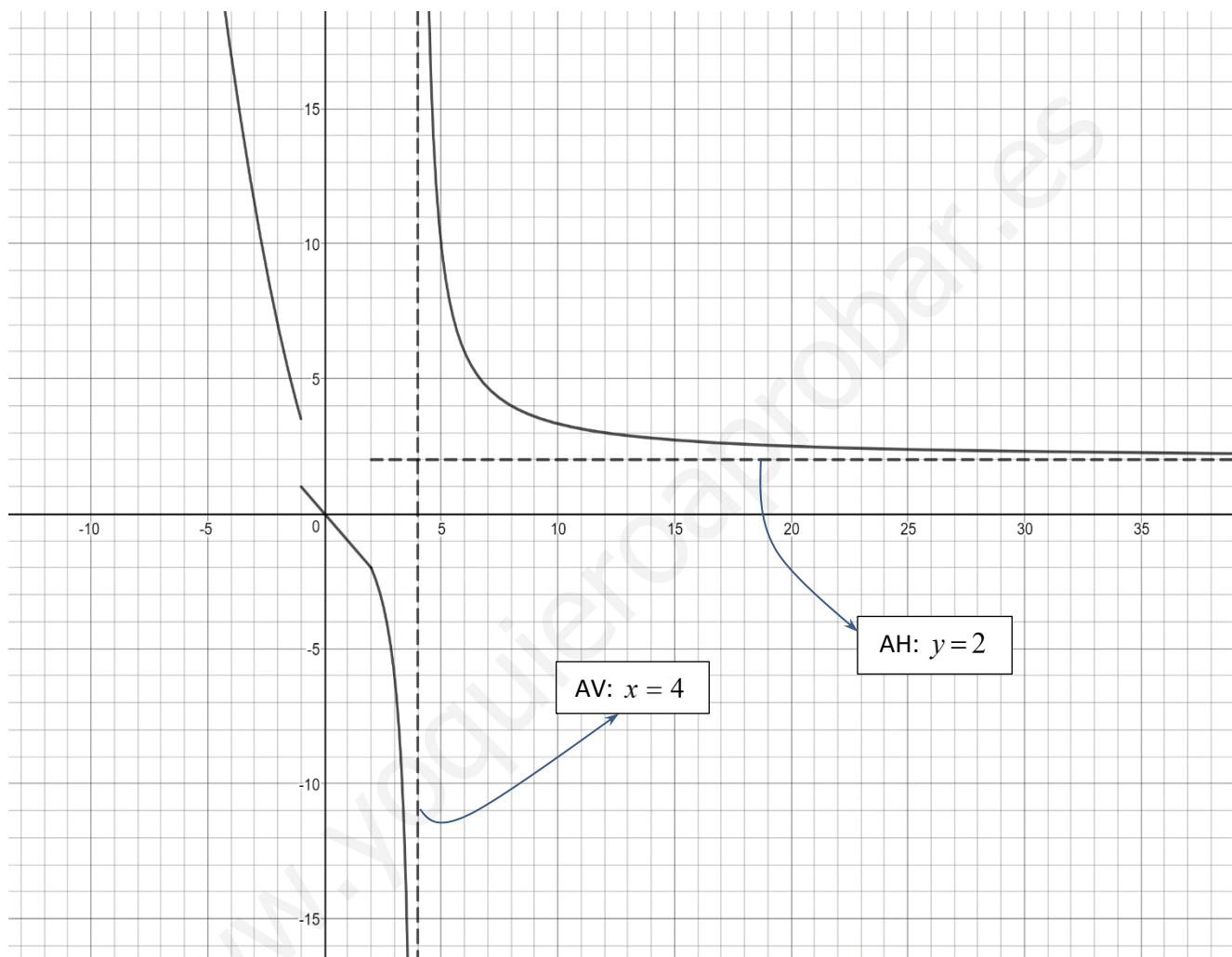
Como la raíz del polinomio x es 0 y la del polinomio $x+3$ es -3 , podemos elaborar la siguiente tabla, con los correspondientes signos del cociente $\frac{x}{x+3}$ en cada uno de los intervalos:

$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, +\infty)$
+	-	+

El dominio de la función coincide con la solución de la inecuación: $\text{Dom } f = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$.

7. [2 puntos] Representa gráficamente la siguiente función definida por trozos. Basándote en la gráfica, estudia la continuidad de la misma.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ \frac{-2x}{-x+4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



La función es continua en todo $\mathbb{R}$, salvo en los puntos $x = -1$, en el que hay una discontinuidad de salto finito, y en el punto $x = 4$, en el que hay una discontinuidad de salto infinito.