

1. **[3 puntos; 1 punto por apartado]** Contesta a las siguientes cuestiones.

- a) Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 2)$ y $B(1, 5)$.
- b) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(2, 4)$ y es paralela a la recta $r \equiv -x + 3y + 5 = 0$.
- c) Hallar la ecuación afín de la recta que pasa por el punto $A(-1, 2)$ y forma un ángulo de 45° con el eje X .

2. **[2 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta s , perpendicular a $r \equiv 2x - y + 1 = 0$, que pase por el punto $A(-2, 2)$. Hallar la distancia del punto A a la recta r .

3. **[1 punto]** Dada la siguiente función definida por trozos,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+3} & \text{si } x \leq -3 \\ x^2 + 2x & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ \frac{5x-2}{-x+3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de la función en los puntos $x = -3$ y $x = 2$. Si no es continua en alguno de los puntos anteriores explicar el tipo de discontinuidad.

4. **[1 punto]** Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x+2} - \sqrt{x^3+1})$

5. Dada la función $f(x) = \frac{-2x^2 - x - 3}{2x^2 - x - 3}$, se pide:

- a) **[1 punto]** Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
- b) **[0,5 puntos]** Puntos de corte con los ejes.
- c) **[0,5 puntos]** Representación gráfica aproximada. Representa también las asíntotas con trazo discontinuo.

6. **[1 punto]** Calcular y simplificar la derivada de la siguiente función: $y = \sqrt{x} \cdot (x^2 + x)$

Soluciones

1. [3 puntos; 1 punto por apartado] Contesta a las siguientes cuestiones.

a) Hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $A(-3, 2)$ y $B(1, 5)$.

$$\frac{x+3}{1-(-3)} = \frac{y-2}{5-2} \Rightarrow \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} \Rightarrow 3x+9 = 4y-8 \Rightarrow 4y = 3x+17 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}$$

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $A(2, 4)$ y es paralela a la recta $r \equiv -x + 3y + 5 = 0$.

Un vector director de r es $\vec{u} = (-3, -1)$. Entonces: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases}$

c) Halla la ecuación afín de la recta que pasa por el punto $A(-1, 2)$ y forma un ángulo de 45° con el eje X .

La pendiente de la recta es $m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$. Por tanto, la ecuación punto-pendiente es $y - 2 = 1(x + 1)$.

Despejando obtenemos la ecuación afín: $y - 2 = x + 1 \Rightarrow y = x + 3$.

2. [2 puntos] Hallar la ecuación general de la recta s , perpendicular a $r \equiv 2x - y + 1 = 0$, que pase por el punto $A(-2, 2)$. Hallar la distancia del también la distancia del punto A a la recta r .

Un vector perpendicular a la recta r es $\vec{u} = (2, -1)$. Por tanto, la recta perpendicular a r que pasa por $A(-2, 2)$

será: $\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-1}$. Pasando a general: $-x - 2 = 2y - 4 \Rightarrow s \equiv x + 2y - 2 = 0$.

La distancia del punto A a la recta r será: $d(A, r) = \frac{|2 \cdot (-2) - 2 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \cong 2,236$ uds.

3. [1 punto] Dada la siguiente función definida por trozos, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x+3} & \text{si } x \leq -3 \\ x^2 + 2x & \text{si } -3 < x \leq 2 \\ \frac{5x-2}{-x+3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$, estudiar la

continuidad de la función en los puntos $x = -3$ y $x = 2$. Si no es continua en alguno de los puntos anteriores explicar el tipo de discontinuidad.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x}{x+3} = \left[\frac{-6}{0} \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} (x^2 + 2x) = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x). \text{ Al ser los límites laterales distintos se tiene}$$

que no existe $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$, con lo que f no es continua en $x = -3$: discontinuidad de salto infinito.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x-2}{-x+3} = \frac{8}{1} = 8 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 = f(2) \Rightarrow f \text{ continua en } x = 2.$$

4. [1 punto] Calcular el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x+2} - \sqrt{x^3+1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x\sqrt{x+2} - \sqrt{x^3+1})(x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1})}{x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(x+2) - (x^3+1)}{x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2 - x^3 - 1}{x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{x+2} + \sqrt{x^3+1}} = +\infty \end{aligned}$$

5. Dada la función $f(x) = \frac{-2x^2 - x - 3}{2x^2 - x - 3}$, se pide:

a) **[1 puntos]** Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Es fácil comprobar que las soluciones de la ecuación $2x^2 - x - 3 = 0$ son $x = \frac{3}{2}$ y $x = -1$. Por tanto,

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2}, -1 \right\}$. Así tenemos dos posibles asíntotas verticales. Estudiemos los límites:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{-2x^2 - x - 3}{2x^2 - x - 3} = \left[\frac{-9}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow \frac{3}{2}^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow \frac{3}{2}^+ \end{cases}; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x^2 - x - 3}{2x^2 - x - 3} = \left[\frac{-4}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases}.$$

De lo anterior se deduce que $x = \frac{3}{2}$ y $x = -1$ son asíntotas verticales.

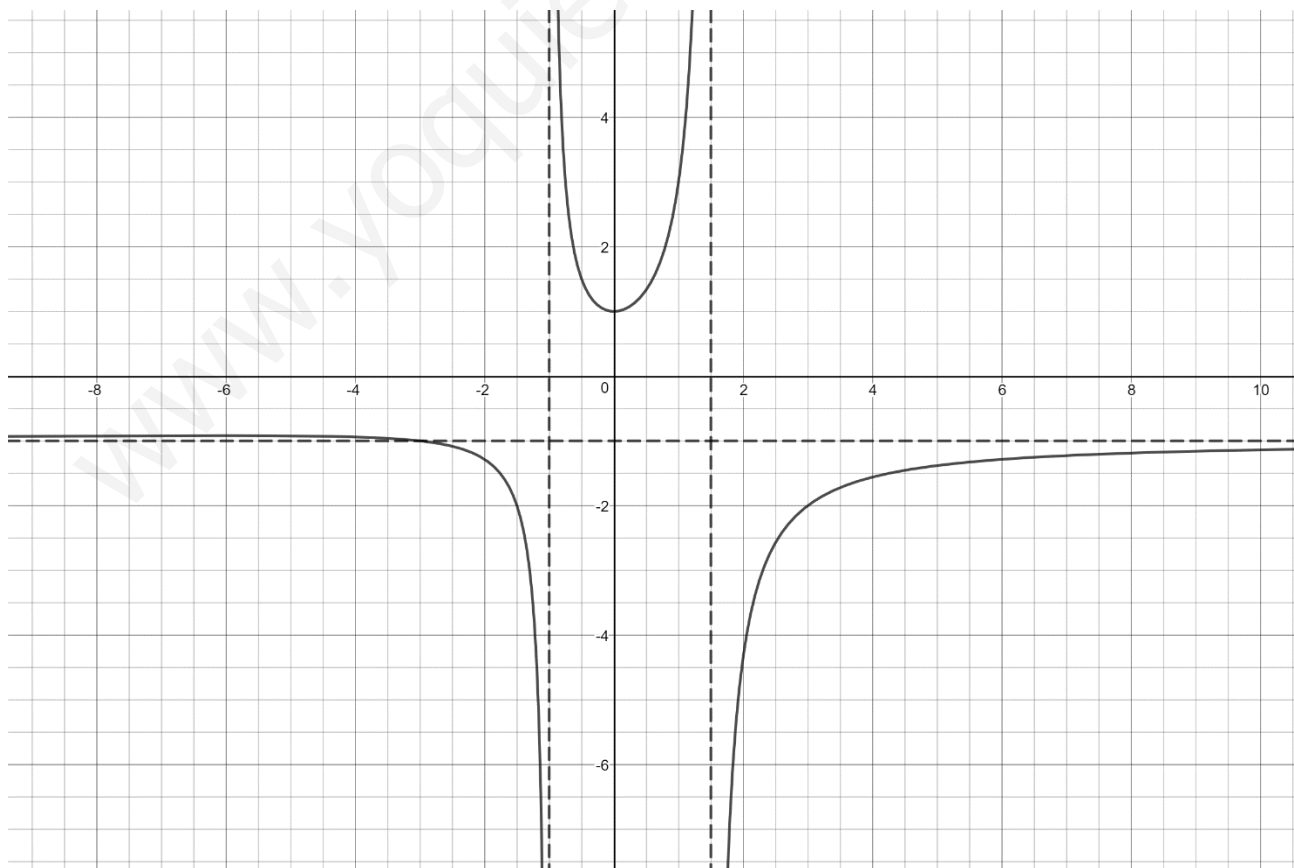
Estudiemos los límites en $+\infty$ y en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - x - 3}{2x^2 - x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 - x - 3}{2x^2 - x - 3} = -1$. Entonces $y = -1$ es una asíntota horizontal. La función, al tener una asíntota horizontal, no puede tener asíntotas oblicuas.

b) **[0,5 puntos]** Puntos de corte con los ejes.

$$-2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 24}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{-4}, \text{ que no tiene solución. Es decir, la función no corta al eje } X$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{-2 \cdot 0^2 - 0 - 3}{2 \cdot 0^2 - 0 - 3} = \frac{-3}{-3} = 1. \text{ Por tanto, el punto de corte con el eje } Y \text{ es } (0, 1).$$

c) **[0,5 puntos]** Representación gráfica aproximada. Representa también las asíntotas con trazo discontinuo.



6. **[1 punto]** Calcula y simplifica la derivada de la siguiente función:

$$y = \sqrt{x} \cdot (x^2 + x); y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x) + \sqrt{x} \cdot (2x + 1) = \frac{x^2 + x}{2\sqrt{x}} + \frac{4x^2 + 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 + 3x}{2\sqrt{x}}$$