

1. Contesta los siguientes apartados:

a) **[1 punto]** Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $P(3, -1)$ y $Q(-1, 4)$. ¿Qué ángulo forma esta recta con el eje X ?

b) **[1 punto]** Hallar la ecuación explícita de la recta s perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - 5\lambda \end{cases}$ que pasa por el punto $R(-1, -1)$. ¿Cuál es la distancia del punto R a la recta r ?

c) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta t perpendicular a la recta r del apartado b) que pasa por el punto $Q(-2, 1)$.

2. Dadas las rectas $r \equiv 2x - y - 4 = 0$ y $s \equiv x + 2y - 7 = 0$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Demuestra que las rectas anteriores son perpendiculares.

b) **[1 punto]** Hallar el haz de rectas de centro el punto de corte P de r y s .

c) **[1 punto]** De entre las rectas del haz, hallar la ecuación general de la que forma un ángulo de 45° con la recta $x + y + 1 = 0$.

d) **[1 punto]** Dada la recta $t \equiv -2x + y + 1 = 0$, calcula la distancia de t a r .

3. **[1 punto]** La recta $\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 - k\lambda \end{cases}$ es paralela a la recta $y = 3x - \frac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor de k ?

4. Dadas las rectas $r \equiv x = 3$, $s \equiv x - 2y + 5 = 0$ y $t \equiv 2x + y = 0$ hallar:

a) **[1 punto]** Demostrar que el triángulo formado por las rectas r , s y t es rectángulo.

b) **[1 punto]** Hallar los vértices del triángulo anterior.

c) **[1 punto]** Calcular el área del triángulo.

Soluciones

1. Contesta los siguientes apartados:

- a) **[1 punto]** Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $P(3, -1)$ y $Q(-1, 4)$. ¿Qué ángulo forma esta recta con el eje X ?

Un vector director de la recta es $\overrightarrow{PQ} = (-4, 5)$. Por tanto, la ecuación continua de la recta es $\frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{5}$.

Pasando a general: $5x - 15 = -4y - 4 \Rightarrow 5x + 4y - 11 = 0$.

La pendiente de la recta anterior es $m = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$. Sabemos que la pendiente es la tangente del ángulo que

forma la recta con el eje X . Entonces $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{5}{4} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{5}{4}\right) = -51,34^\circ$. Como el ángulo ha de ser positivo y la recta es decreciente (la pendiente es negativa), tenemos que $\alpha = 180 - 51,34 \Rightarrow \alpha = 128,66^\circ$.

- b) **[1 punto]** Hallar la ecuación explícita de la recta s perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - 5\lambda \end{cases}$ que pasa por el punto $R(-1, -1)$. ¿Cuál es la distancia del punto R a la recta r ?

Un vector director de r es $\vec{u} = (2, -5)$. Por tanto, un vector perpendicular a $\vec{u}$ será $\vec{v} = (5, 2)$. De este modo,

la recta s perpendicular a r que pasa por el punto $R(-1, -1)$ será $\frac{x+1}{5} = \frac{y+1}{2}$. Pasando a explícita:

$$2x + 2 = 5y + 5 \Rightarrow 2x - 5y - 3 = 0 \Rightarrow s \equiv y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}.$$

Hallemos la ecuación general de la recta r : $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-5} \Rightarrow -5x - 5 = 2y - 6 \Rightarrow r \equiv -5x - 2y + 1 = 0$.

La distancia del punto $R(-1, -1)$ a la recta r es $d(R, r) = \frac{|(-5) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{(-5)^2 + (-2)^2}} = \frac{|5 + 2 + 1|}{\sqrt{29}} = \frac{8}{\sqrt{29}}$.

- c) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta t perpendicular a la recta r del apartado b) que pasa por el punto $Q(-2, 1)$.

Como tanto s como t son perpendiculares a r , s y t han de ser paralelas. Esto quiere decir que la recta t debe ser de la forma $2x - 5y + C = 0$. Y como ha de pasar por el punto $Q(-2, 1)$: $2 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 + C = 0 \Rightarrow \Rightarrow -4 - 5 + C = 0 \Rightarrow C = 9$. Por tanto $t \equiv 2x - 5y + 9 = 0$.

2. Dadas las rectas $r \equiv 2x - y - 4 = 0$ y $s \equiv x + 2y - 7 = 0$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Demuestra que las rectas anteriores son perpendiculares.

Un vector director de r es $\vec{u} = (1, 2)$, y un vector director de s es $\vec{v} = (-2, 1)$. Estos dos vectores son perpendiculares ya que su producto escalar es igual a cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 2) \cdot (-2, 1) = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0$. Por tanto, también son perpendiculares la recta r y s .

- b) **[1 punto]** Hallar el haz de rectas de centro el punto de corte P de r y s .

Resolvamos el sistema formado por las rectas r y s : $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$. Multiplicando ambas por 2 tenemos:

$$\begin{cases} 4x - 2y - 8 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}. \text{ Sumando ambas ecuaciones: } 5x - 15 = 0 \Rightarrow x = 3. \text{ Y sustituyendo en la segunda ecuación:}$$

$$3 + 2y - 7 = 0 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2. \text{ Por tanto, el punto de corte de ambas rectas es } P(3, 2).$$

De este modo, el haz de rectas de centro el punto P es $\lambda(x-3) + \mu(y-2) = 0$, o bien $y-2 = m(x-3)$.

- c) **[1 punto]** De entre las rectas del haz, hallar la ecuación general de la que forma un ángulo de 45° con la recta $x + y + 1 = 0$.

Si tomamos como ecuación del haz $y-2 = m(x-3)$, la recta que buscamos tiene pendiente m . La forma explícita de la recta $x + y + 1 = 0$ es $y = -x - 1$, cuya pendiente es igual a -1 . Por tanto:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \left| \frac{m-1}{1-m \cdot (-1)} \right| \Rightarrow 1 = \left| \frac{m-1}{1+m} \right| \Rightarrow \begin{cases} \frac{m-1}{1+m} = 1 \Rightarrow m-1 = 1+m \text{ (no tiene solución)} \\ \frac{m-1}{1+m} = -1 \Rightarrow m-1 = -1-m \Rightarrow m = 0 \end{cases}.$$

Para $m = 0$, la recta buscada es $y-2 = 0(x-3) \Rightarrow y-2 = 0$. Por tanto, también valdría la recta $x-3 = 0$.

- d) **[1 punto]** Dada la recta $t \equiv -2x + y + 1 = 0$, calcula la distancia de t a r .

Como $r \equiv 2x - y - 4 = 0$, claramente r y $t \equiv -2x + y + 1 = 0$ son paralelas: $\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-4}{1}$. Un punto de t

$$\text{es, por ejemplo, } A(0, -1). \text{ Por tanto } d(r, t) = d(A, r) = \frac{|2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) - 4|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

3. **[1 punto]** La recta $\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 - k\lambda \end{cases}$ es paralela a la recta $y = 3x - \frac{1}{2}$. ¿Cuál es el valor de k ?

Pasemos ambas rectas a forma general:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-k} \Rightarrow -kx - 2k = 3y - 3 \Rightarrow -kx - 3y - 2k + 3 = 0.$$

$$y = 3x - \frac{1}{2} \Rightarrow 2y = 6x - 1 \Rightarrow -6x + 2y + 1 = 0.$$

$$\text{Para que sean paralelas: } \frac{-k}{-6} = \frac{-3}{2} \Rightarrow -2k = 18 \Rightarrow k = -9.$$

4. Dadas las rectas $r \equiv x = 3$, $s \equiv x - 2y + 5 = 0$ y $t \equiv 2x + y = 0$ hallar:

- a) **[1 punto]** Demostrar que el triángulo formado por las rectas r , s y t es rectángulo.

Basta demostrar que dos de las tres rectas son perpendiculares. En este caso lo son s y t ya que un vector director de s es $\vec{u} = (2, 1)$ y un vector director de t es $\vec{v} = (-1, 2)$. Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, entonces $\vec{u} \perp \vec{v}$ y también $s \perp t$.

- b) **[1 punto]** Hallar los vértices del triángulo anterior.

Llamemos $A = r \cap s$, $B = r \cap t$ y $C = s \cap t$.

Claramente $A(3, 4)$ y $B(3, -6)$. Para hallar C se resuelve el sistema $\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$, cuyas soluciones son

$$x = -1, y = 2. \text{ Por tanto, } C(-1, 2).$$

c) [1 punto] Calcular el área del triángulo.

Lo haremos de dos maneras.

1) Tomando como base $b = |\overline{AB}|$ y como altura $h = d(C, r)$.

$$b = |\overline{AB}| = |(0, -10)| = \sqrt{0^2 + (-10)^2} = \sqrt{0 + 100} = \sqrt{100} = 10;$$

$$h = d(C, r) = \frac{|1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-3)|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \frac{|-1 - 3|}{\sqrt{1}} = \frac{|-4|}{1} = \frac{4}{1} = 4.$$

$$\text{Entonces el área del triángulo es } A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ uds}^2.$$

2) Como las rectas s y t son perpendiculares, los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son los catetos del triángulo rectángulo, con lo que ambos pueden hacer tanto de base como de altura. De este modo, el área del triángulo es

$$A = \frac{|\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}|}{2} = \frac{|(-4, -2)| \cdot |(-4, 8)|}{2} = \frac{\sqrt{16 + 4} \cdot \sqrt{16 + 64}}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{80}}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 20 \text{ uds}^2.$$

