

1. Contesta los siguientes apartados:

- a) **[1,5 puntos]** Hallar las ecuaciones continua, explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-2, 1)$. Calcular sus puntos de corte con los ejes.
- b) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta paralela a la recta hallada en el apartado a) que pasa por el punto $P(-3, -1)$.
- c) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta perpendicular a la hallada en el apartado a) que pasa por el punto $Q(1, 5)$.

2. Dadas las rectas $r \equiv x + y - 3 = 0$ y $s \equiv 2x - y - 3 = 0$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Hallar el ángulo α formado por las rectas r y s .
- b) **[1 punto]** Hallar el haz de rectas de centro el punto de corte de r y s .
- c) **[1 punto]** De entre las rectas del haz, hallar la ecuación general de la que es paralela a la recta $x - y - 2 = 0$.
- d) **[0,5 puntos]** ¿Son paralelas las rectas $t \equiv -2x - 2y + 1 = 0$ y r ? En caso afirmativo explica por qué y halla la distancia de t a r .

3. **[1 punto]** La recta $y = -\frac{3}{2}x + 1$ es perpendicular a la recta $2x - ky + 5 = 0$. ¿Cuál es el valor de k ?

4. Dado el triángulo de vértices $A(-1, 4)$, $B(3, 2)$ y $C(-2, 0)$, hallar:

- a) **[1 punto]** La ecuación general de la recta que contiene a la altura que pasa por el vértice A .
- b) **[1 punto]** El área del triángulo.

5. **[1,5 puntos]** Dada la recta $r \equiv x + y - 3 = 0$ y el punto $A(4, 1)$, hallar las coordenadas de un punto P que se encuentre a la misma distancia de A que de r .

Nota: la altura de un triángulo es el segmento perpendicular a un lado que une este (o su prolongación) con el vértice opuesto.

Soluciones

1. Contesta los siguientes apartados:

- a) **[1,5 puntos]** Hallar las ecuaciones continua, explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos $A(2, -3)$ y $B(-2, 1)$. Calcular sus puntos de corte con los ejes.

Un vector director de la recta es $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-4, 4)$. La ecuación continua es $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{4}$. Multiplicando en

cruz y pasando todo a un miembro obtenemos la ecuación implícita o general: $4x - 8 = -4y - 12 \Rightarrow \Rightarrow 4x + 4y + 4 = 0 \Rightarrow x + y + 1 = 0$. Despejando y obtenemos la ecuación explícita: $y = -x - 1$.

Punto de corte eje Y : $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow (0, -1)$. Punto de corte eje X : $y = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 0)$.

- b) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta paralela a la recta hallada en el apartado a) que pasa por el punto $P(-3, -1)$.

La recta paralela tendrá la misma dirección que la recta anterior. Por tanto, un vector director suyo es

$\vec{u} = (-4, 4)$. Entonces: $\frac{x+3}{-4} = \frac{y+1}{4} \Rightarrow 4x + 12 = -4y - 4 \Rightarrow 4x + 4y + 16 = 0 \Rightarrow x + y + 4 = 0$.

- c) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta perpendicular a la hallada en el apartado a) que pasa por el punto $Q(1, 5)$.

Un vector perpendicular a la recta hallada en el apartado a) es $\vec{v} = (4, 4)$. Entonces: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x - 4 = 4y - 20 \Rightarrow 4x - 4y + 16 = 0 \Rightarrow x - y + 4 = 0$.

2. Dadas las rectas $r \equiv x + y - 3 = 0$ y $s \equiv 2x - y - 3 = 0$, se pide:

- a) **[0,5 puntos]** Hallar el ángulo α formado por las rectas r y s .

Un vector director de r es $\vec{u} = (-1, 1)$ y un vector director de s es $\vec{v} = (1, 2)$. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|(-1, 1) \cdot (1, 2)|}{|(-1, 1)| \cdot |(1, 2)|} = \frac{|-1 + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 71,565^\circ. \end{aligned}$$

- b) **[1 punto]** Hallar el haz de rectas de centro el punto de corte de r y s .

Resolviendo el sistema formado por las rectas r y s hallamos el punto de corte de r y s : $\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases}$.

Sumando ambas ecuaciones: $3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$. Sustituyendo en la primera ecuación: $2 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 1$

Por tanto, el punto de corte de ambas rectas es $A(2, 1)$, y el haz de rectas de centro el punto de corte anterior es $\lambda(x - 2) + \mu(y - 1) = 0$. También lo podemos escribir así: $y - 1 = m(x - 2)$.

- c) **[1 punto]** De todas las rectas del haz, hallar la ecuación general de aquella que es paralela a la recta $x - y - 2 = 0$.

Expresemos el haz en su forma general: $\lambda x - 2\lambda + \mu y - \mu = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y - 2\lambda - \mu = 0$. Un vector director de $x - y - 2 = 0$ es $\vec{u} = (1, 1)$ y un vector director genérico del haz es $\vec{v} = (-\mu, \lambda)$. Entonces, como la recta del haz que buscamos ha de ser paralela a $x - y - 2 = 0$, basta con que $\mu = -1$ y $\lambda = 1$. Sustituyendo en la ecuación del haz, la recta es $x - y - 1 = 0$.

d) **[0,5 puntos]** ¿Son paralelas las rectas $t \equiv -2x - 2y + 1 = 0$ y r ? En caso afirmativo explica por qué y halla la distancia de t a r .

Las rectas $r \equiv x + y - 3 = 0$ y $t \equiv -2x - 2y + 1 = 0$ son paralelas porque sus vectores directores son claramente proporcionales. Por tanto, la distancia entre las dos rectas es la distancia de un punto de una de ellas a la otra.

Un punto de r es, por ejemplo, $P(1, 2)$. Entonces la distancia entre las dos rectas es:

$$d(r, t) = d(A, t) = \frac{|-2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-2 - 4 + 1|}{\sqrt{8}} = \frac{|-5|}{\sqrt{8}} = \frac{5}{\sqrt{8}} = \frac{5\sqrt{8}}{8} = \frac{10\sqrt{2}}{8} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \text{ uds.}$$

3. **[1 punto]** La recta $y = -\frac{3}{2}x + 1$ es perpendicular a la recta $2x - ky + 5 = 0$. ¿Cuál es el valor de k ?

La ecuación general de la recta $y = -\frac{3}{2}x + 1$ es $2y = -3x + 2 \Rightarrow 3x + 2y - 2 = 0$, luego un vector director suyo es $\vec{u} = (-2, 3)$. Un vector director de $2x - ky + 5 = 0$ es $\vec{v} = (k, 2)$. Como las dos rectas son perpendiculares, sus vectores directores también lo son. Por tanto: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-2, 3) \cdot (k, 2) = 0 \Rightarrow -2k + 6 = 0 \Rightarrow k = 3$.

4. Dado el triángulo de vértices $A(-1, 4)$, $B(3, 2)$ y $C(-2, 0)$, hallar:

a) **[1 punto]** La ecuación general de la recta que contiene a la altura que pasa por el vértice A .

La altura que pasa por el vértice A es perpendicular al lado BC . Un vector director de la recta que contiene a este lado es $\overrightarrow{BC} = (-5, -2)$, luego un vector perpendicular será $\vec{n} = (2, -5)$. Por tanto, la altura que pasa

por el vértice A es $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-5} \Rightarrow -5x - 5 = 2y - 8 \Rightarrow 5x + 2y - 3 = 0$.

b) **[1 punto]** El área del triángulo.

El lado BC del triángulo es $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-2}{-2} \Rightarrow -2x + 6 = -5y + 10 \Rightarrow 2x - 5y + 4 = 0$. Tomaremos como

base del triángulo la distancia de B a C : $b = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$ uds. Y tomaremos

como altura h la distancia de A al lado BC : $h = \frac{|2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 4 + 4|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2}} = \frac{|-2 - 20 + 4|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{18}{\sqrt{29}}$ uds.

Por tanto, el área S del triángulo es $S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{29} \cdot 18 / \sqrt{29}}{2} = 9$ uds².

5. **[1,5 puntos]** Dada la recta $r \equiv x + y - 3 = 0$ y el punto $A(4, 1)$, hallar las coordenadas de un punto P que se encuentre a la misma distancia de A que de r .

Un vector $\perp$ a r es $\vec{u} = (1, 1)$. La recta perpendicular a $r \equiv x + y - 3 = 0$ que pasa por el punto $A(4, 1)$ es

$\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow x - 4 = y - 1 \Rightarrow x - y - 3 = 0$. Calculemos ahora el punto de corte de esta recta y la recta r :

$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$. Sustituyendo: $3 + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 0$. El punto de corte es $M(3, 0)$.

Naturalmente, el punto que se encuentra a la misma distancia de A que de r es el punto medio del segmento

$\overline{AM}$. Es decir, el punto $P\left(\frac{4+3}{2}, \frac{1+0}{2}\right) \Rightarrow P\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Hay otra opción para realizar este problema.

La recta s paralela a $r \equiv x + y - 3 = 0$ que pasa por $A(4,1)$ es $s \equiv x + y - 5 = 0$. Un punto cualquiera de esta recta es de la forma $P(x, 5 - x)$. Ahora se debe cumplir que $d(A, P) = d(P, r)$:

$$\sqrt{(4-x)^2 + (x-4)^2} = \frac{|x+5-x-3|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow \sqrt{2(x-4)^2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}(x-4) = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow x-4=1 \Rightarrow x=5 \\ \sqrt{2}(4-x) = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 4-x=1 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

Por tanto, o bien $P(5,0)$, o bien $P(3,2)$.

En la siguiente figura se pueden observar todas las posibilidades.

