1. Contestar a los siguientes apartados.
   a) **[1 punto]** Hallar las ecuaciones continua, explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos $A(3,2)$ y $B(1,-1)$. Calcular sus puntos de corte con los ejes.
   b) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta paralela a la recta hallada en el apartado a) que pasa por el punto $P(-3,-1)$.
   c) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta perpendicular a la hallada en el apartado a) que pasa por el punto $Q(1,5)$.
2. Dadas las rectas $r \equiv x+y-1=0$ y $s \equiv 3x+y+4=0$, se pide.
   a) **[0,5 puntos]** Hallar el ángulo α formado por las rectas r y s
   b) **[1 punto]** Hallar el haz de rectas de centro el punto de corte de r y s.
   c) **[0,5 puntos]** De todas las rectas del haz, hallar la ecuación general de aquella que es paralela a la recta $x-y-2=0$.
   d) **[0,5 puntos]** De todas las rectas del haz, hallar la ecuación general de aquella de aquella que es perpendicular a la recta $x-2y+1=0$.
   e) **[0,5 puntos]** Hallar la distancia de la recta $t \equiv -2x-2y+1=0$ a la recta r.
3. **[1 punto]** La recta $y=-\frac{3}{2}x+1$ es perpendicular a la recta $2x-ky+5=0$. ¿Cuál es el valor de k?
4. Dado el triángulo de vértices $A(-1,4)$, $B(3,2)$ y $C(-2,0)$, hallar:
   a) **[1 punto]** La ecuación general de las rectas que contienen a las alturas que pasan por los vértices A y B.
   b) **[0,5 puntos]** El ortocentro del triángulo.
   c) **[1 punto]** El área del triángulo.
5. **[1,5 puntos]** Dada la recta $r \equiv x+y-3=0$ y el punto $A(4,1)$, hallar las coordenadas de un punto P que equidiste de A y r (equidistar significa *estar a la misma distancia*).

Nota: la altura de un triángulo es el segmento perpendicular a un lado que une este (o su prolongación) con el vértice opuesto. El ortocentro es el punto donde se cortan las tres alturas.

Soluciones

1. Contestar a los siguientes apartados.

 a) **[1 punto]** Hallar las ecuaciones continua, explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos $A(3,2)$ y $B(1,-1)$. Calcular sus puntos de corte con los ejes.

 Un vector director de la recta es $\overrightarrow{AB}=(-2,-3)$. La ecuación continua es $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y-2}{-3}$. Multiplicando en cruz y pasando todo a un miembro obtenemos la ecuación implícita o general: $-3x+9=-2y+4\Rightarrow$ $\Rightarrow 3x-2y-5=0$. Despejando y obtenemos la ecuación explícita: $2y=3x-5\Rightarrow y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2}$.

 Punto de corte eje Y: $x=0\Rightarrow y=-\dfrac{5}{2}\Rightarrow\left(0,-\dfrac{5}{2}\right)$. Punto de corte eje X : $y=0\Rightarrow x=\dfrac{5}{3}\Rightarrow\left(\dfrac{5}{3},0\right)$.

 b) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta paralela a la recta hallada en el apartado a) que pasa por el punto $P(-3,-1)$.

 Una paralela tiene la misma dirección que la recta obtenida en el apartado anterior. Por tanto:

 $$\frac{x+3}{-2}=\frac{y+1}{-3}\Rightarrow -3x-9=-2y-2\Rightarrow 3x-2y+7=0.$$

 c) **[0,5 puntos]** Hallar la ecuación general de la recta perpendicular a la hallada en el apartado a) que pasa por el punto $Q(1,5)$.

 Un vector perpendicular a la recta obtenida en el apartado $\vec{n}=(3,-2)$. Por tanto:

 $$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{-2}\Rightarrow -2x+2=3y-15\Rightarrow 2x+3y-17=0.$$

2. Dadas las rectas $r\equiv x+y-1=0$ y $s\equiv 3x+y+4=0$, se pide.

 a) **[0,5 puntos]** Hallar el ángulo α formado por las rectas r y s

 Un vector director de r es $\vec{u}=(-1,1)$ y un vector director de s es $\vec{v}=(-1,3)$. Entonces tenemos:

 $$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{|(-1,1)\cdot(-1,3)|}{|(-1,1)|\cdot|(-1,3)|}=\frac{|1+3|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+3^2}}=$$

 $$=\frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{4\sqrt{20}}{20}=\frac{8\sqrt{5}}{20}=\frac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\alpha=\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}\Rightarrow\alpha=26,565^{\circ}$$

 b) **[1 punto]** Hallar el haz de rectas de centro el punto de corte de r y s.

 El punto de corte se halla resolviendo el sistema formado por las dos rectas:

 $\begin{cases}x+y-1=0\\3x+y+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x-3y+3=0\\3x+y+4=0\end{cases}\Rightarrow -2y+7=0\Rightarrow y=\dfrac{7}{2}$. Sustituyendo en la primera ecuación: $x+\dfrac{7}{2}-1=0\Rightarrow x=1-\dfrac{7}{2}\Rightarrow x=-\dfrac{5}{2}$. Por tanto, el punto de corte de r y s es $P\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{2}\right)$.

 Escribiremos el haz de las dos maneras posibles: $\lambda\left(x+\dfrac{5}{2}\right)+\mu\left(y-\dfrac{7}{2}\right)=0$. De aquí obtenemos que $\mu\left(y-\dfrac{7}{2}\right)=-\lambda\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\Rightarrow y-\dfrac{7}{2}=-\dfrac{\lambda}{\mu}\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$. Llamando $m=-\dfrac{\lambda}{\mu}$ se tiene $y-\dfrac{7}{2}=m\left(x+\dfrac{5}{2}\right)$.

c) **[0,5 puntos]** De todas las rectas del haz, hallar la ecuación general de aquella que es paralela a la recta $x-y-2=0$.

La ecuación explícita de la recta $x-y-2=0$ es $y=x-2$. Por tanto, su pendiente es $m=1$.

Esto quiere decir que la ecuación del haz paralela a $x-y-2=0$ es:

$$y-\frac{7}{2}=1\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)\Rightarrow y-\frac{7}{2}=x+\frac{5}{2}\Rightarrow 2y-7=2x+5\Rightarrow 2x-2y+12=0\Rightarrow x-y+6=0$$

d) **[0,5 puntos]** De todas las rectas del haz, hallar la ecuación general de aquella que es perpendicular a la recta $x-2y+1=0$.

La forma explícita de $x-2y+1=0$ es $2y=x+1\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, luego su pendiente es $m=\frac{1}{2}$. Por tanto, una perpendicular tendrá pendiente $m'=-\frac{1}{m}=\frac{-1}{1/2}=-2$. Por tanto, la ecuación de la recta del haz que es perpendicular a $x-2y+1=0$ es: $y-\frac{7}{2}=-2\left(x+\frac{5}{2}\right)\Rightarrow y-\frac{7}{2}=-2x-5\Rightarrow 2y-7=-4x-10\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x+2y+3=0$.

e) **[0,5 puntos]** Hallar la distancia de la recta $t\equiv -2x-2y+1=0$ a la recta r.

Las rectas $r\equiv x+y-1=0$ y $t\equiv -2x-2y+1=0$ son paralelas porque sus vectores directores son claramente proporcionales. Por tanto, la distancia entre las dos rectas es la distancia de un punto de una de ellas a la otra. Un punto de r es, por ejemplo, $(0,1)$. Entonces la distancia entre las dos rectas es:

$$\frac{|-2\cdot 0+(-2)\cdot 1+1|}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}}=\frac{|0-2+1|}{\sqrt{8}}=\frac{|-1|}{\sqrt{8}}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}}{8}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}\text{ u.}$$

3. **[1 punto]** La recta $y=-\frac{3}{2}x+1$ es perpendicular a la recta $2x-ky+5=0$. ¿Cuál es el valor de k?

La ecuación general de la recta $y=-\frac{3}{2}x+1$ es $2y=-3x+2\Rightarrow 3x+2y-2=0$, luego un vector director suyo es $\vec{u}=(-2,3)$. Un vector director de $2x-ky+5=0$ es $\vec{v}=(k,2)$.

Como las dos rectas son perpendiculares, sus vectores directores también lo son. Por tanto:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(-2,3)\cdot(k,2)=0\Rightarrow -2k+6=0\Rightarrow k=3$.

4. Dado el triángulo de vértices $A(-1,4)$, $B(3,2)$ y $C(-2,0)$, hallar:

a) **[1 punto]** La ecuación general de las rectas que contienen a las alturas que pasan por los vértices A y B.

La altura que pasa por el vértice A es perpendicular al lado BC. Un vector director de la recta que contiene a este lado es $\overrightarrow{BC}=(-5,-2)$, luego un vector perpendicular será $\vec{n}=(2,-5)$. Por tanto, la altura que pasa por el vértice A es $\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-5}\Rightarrow -5x-5=2y-8\Rightarrow 5x+2y-3=0$.

La altura que pasa por el vértice B es perpendicular al lado AC. Un vector director de la recta que contiene a este lado es $\overrightarrow{AC}=(-1,-4)$, luego un vector perpendicular será $\vec{n}=(4,-1)$. Por tanto, la altura que pasa por el vértice B es $\frac{x-3}{4}=\frac{y-2}{-1}\Rightarrow -x+3=4y-8\Rightarrow x+4y-11=0$

b) **[0,5 puntos]** El ortocentro del triángulo.

El ortocentro es el punto donde se cortan las alturas. Para calcularlo resolveremos el sistema formado por las ecuaciones de las dos alturas halladas en el apartado a).

$\begin{cases} 5x+2y-3=0 \\ x+4y-11=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10x-4y+6=0 \\ x+4y-11=0 \end{cases} \Rightarrow -9x-5=0 \Rightarrow x=-\dfrac{5}{9}$. Sustituyendo en la segunda ecuación: $-\dfrac{5}{9}+4y-11=0 \Rightarrow 4y=11+\dfrac{5}{9} \Rightarrow 4y=\dfrac{104}{9} \Rightarrow y=\dfrac{104}{36} \Rightarrow y=\dfrac{26}{9}$.

De este modo, el ortocentro es el punto $P\left(-\dfrac{5}{9},\dfrac{26}{9}\right)$.

c) **[1 punto]** El área del triángulo.

El lado BC del triángulo es $\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-2}{-2} \Rightarrow -2x+6=-5y+10 \Rightarrow 2x-5y+4=0$. Tomaremos como base del triángulo la distancia de B a C: $b=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$ u. Y tomaremos como altura h la distancia de A al lado BC: $h=\dfrac{\left|2\cdot(-1)+(-5)\cdot 4+4\right|}{\sqrt{2^2+(-5)^2}}=\dfrac{\left|-2-20+4\right|}{\sqrt{4+25}}=\dfrac{18}{\sqrt{29}}$ u.

Por tanto, el área S del triángulo es $S=\dfrac{b\cdot h}{2}=\dfrac{\sqrt{29}\cdot\dfrac{18}{\sqrt{29}}}{2}=9$ u².

5. **[1,5 puntos]** Dada la recta $r\equiv x+y-3=0$ y el punto $A(4,1)$, hallar las coordenadas de un punto P que se encuentre a la misma distancia de A y r (equidistar significa *estar a la misma distancia*).

Un vector perpendicular a r es $\vec{n}=(1,1)$. Entonces la recta perpendicular a $r\equiv x+y-3=0$ que pasa por el punto $A(4,1)$ es $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{1} \Rightarrow x-4=y-1 \Rightarrow x-y-3=0$. Calculemos ahora el punto de corte de esta recta y la recta r: $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow x=3$. Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos la coordenada y del punto: $3+y-3=0 \Rightarrow y=0$. Por tanto, el punto de corte es $P(3,0)$.

Naturalmente, el punto que equidista de $r\equiv x+y-3=0$ y $A(4,1)$ es el punto medio del segmento que $\overline{AP}$. Es decir, el punto $M\left(\dfrac{4+3}{2},\dfrac{1+0}{2}\right) \Rightarrow M\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.