

1. [5 puntos; 1 punto por apartado] Calcular los siguientes límites justificando, de manera razonada, el resultado de cada uno de ellos:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^4 + x^3 + 5x - 20}{-5x^3 + 7x^2 - 6}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 5}{x^2 - 5x + 6}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^3 + 6x^2 + 3x + 2}{2x^3 + x + 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

2. [2 puntos] Dada la función definida por trozos $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 3x & \text{si } 1 \leq x < 3, \\ \frac{x-3}{x^2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, debes estudiar de manera

razonada la continuidad de la función en los puntos $x = 1$ y $x = 3$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos, explicar el tipo de discontinuidad que se presenta.

3. Se considera la siguiente función definida por trozos: $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{5}{2} & \text{si } x < -2 \\ 9 & \text{si } x = -2 \\ \frac{x-1}{x+4} & \text{si } -2 < x < 4 \\ \frac{x^2+1}{x-5} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$. Se pide:

- a) [2 puntos] Estudiar, de manera razonada, su continuidad en los puntos críticos $x = -2$ y $x = 4$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos, explicar el tipo de continuidad existente.
- b) [1 punto] ¿Hay algún otro punto en el que la función no sea continua? Si la respuesta es afirmativa, justificarlo de manera razonada y explicar el tipo de discontinuidad que se presenta en ese punto.

Soluciones

1. [5 puntos] Calcular los siguientes límites justificando, de manera razonada, el resultado de cada uno de ellos:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^4 + x^3 + 5x - 20}{-5x^3 + 7x^2 - 6} = +\infty$. La razón por la que el límite es $+\infty$ está en que el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador. Además, el signo es positivo porque predominan los monomios de mayor grado, y se tiene que: $\frac{-3x^4}{-5x^3} = \frac{- \cdot +}{- \cdot +} = \frac{-}{-} = +$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-5}{x^2-5x+6} = \frac{3 \cdot 2 - 5}{2^2 - 5 \cdot 2 + 6} = \frac{6-5}{4-10+6} = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \end{cases}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = [\text{INDET } \infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1 - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{+\infty} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^3 + 6x^2 + 3x + 2}{2x^3 + x + 3} = \frac{5 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 2}{2 \cdot (-1)^3 + (-1) + 3} = \frac{-5 + 6 - 3 + 2}{-2 - 1 + 3} = \left[\text{INDET } \frac{0}{0} \right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(5x^2 + x + 2)}{\cancel{(x+1)}(2x^2 - 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + x + 2}{2x^2 - 2x + 3} = \frac{5 \cdot (-1)^2 + (-1) + 2}{2 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 3} = \frac{5 - 1 + 2}{2 + 2 + 3} = \frac{6}{7}$

e) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \left[\text{INDET } \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}^2 - 2^2}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$

2. [2 puntos] Dada la función definida por trozos $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 3x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \frac{x-3}{x^2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, debes **estudiar de manera**

razonada la continuidad de la función en los puntos $x = 1$ y $x = 3$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos explicar el tipo de discontinuidad que se presenta.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = \left[\frac{2}{0} \right] = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 3x) = 2$ } Como los límites laterales son distintos, deducimos que no existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

y, por tanto, f **no es continua** en $x = 1$. Al ser uno de los límites infinito y el otro finito, en el punto $x = 1$ hay una **discontinuidad de salto infinito**.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x^2 + 3x) = -9 + 9 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x^2} = \frac{3-3}{3^2} = \frac{0}{9} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0. \text{ Además, claramente } f(3) = 0. \text{ Por tanto, se tiene}$$

que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 0$, con lo que f es **continua** en el punto $x = 3$.

$$3. \text{ Se considera la siguiente función definida por trozos: } f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{5}{2} & \text{si } x < -2 \\ 9 & \text{si } x = -2 \\ \frac{x-1}{x+4} & \text{si } -2 < x < 4 \\ \frac{x^2+1}{x-5} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}. \text{ Se pide:}$$

a) [2 puntos] **Estudiar, de manera razonada**, su continuidad en los puntos críticos $x = -2$ y $x = 4$. Caso de que no sea continua en alguno de ellos, explicar el tipo de continuidad existente.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(2x + \frac{5}{2} \right) = -4 + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-1}{x+4} = \frac{-2-1}{-2+4} = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\frac{3}{2}. \text{ Por otro lado, } f(-2) = 9. \text{ Entonces}$$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$, con lo que f **no es continua** en el punto $x = -2$. En tal punto hay una discontinuidad evitable ya que existe el límite de la función en el punto, pero no es igual que la imagen de la función en dicho punto.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-1}{x+4} = \frac{4-1}{4+4} = \frac{3}{8} \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2+1}{x-5} = \frac{16+1}{4-5} = \frac{17}{-1} = -17 \end{aligned} \right\} \text{ Como los límites laterales son distintos, deducimos que no}$$

existe $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ y, por tanto, f **no es continua** en $x = 4$. Como tales límites laterales son números reales, nos encontramos con una discontinuidad de salto finito en el punto $x = 4$.

b) [1 punto] ¿Hay algún otro punto en el que la función no sea continua? Si la respuesta es afirmativa, justificarlo de manera razonada y explicar el tipo de discontinuidad que se presenta en ese punto.

El dominio de la función del segundo trozo, $y = \frac{x-1}{x+4}$, no incluye al punto $x = -4$, pero este punto no está entre -2 y 4 , con lo que en este caso no tenemos nada que decir.

El dominio de la función del tercer trozo, $y = \frac{x^2+1}{x-5}$, no incluye al punto $x = 5$, el cual es mayor que 4 . Por tanto, en este punto se podría dar una discontinuidad. Estudiemos los límites laterales

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2+1}{x-5} = \left[\frac{26}{0} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2+1}{x-5} = \left[\frac{26}{0} \right] = +\infty \end{aligned} \right\} \text{ De aquí se desprende que no existe } \lim_{x \rightarrow 5} f(x), \text{ con lo que } f \text{ no es}$$

continua en el punto $x = 5$. Como los límites laterales en este punto son infinitos, pero de distinto signo, se trata de una discontinuidad de salto infinito.