1. **[2 puntos]** Hallar el dominio y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

   a) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+2x-3}$; b) $g\left(x\right)=\sqrt{x+5}$

2. **[1 punto]** Estudiar la simetría (par o impar) de las siguientes funciones. Caso de que sean simétricas decir si lo son respecto del eje Y o respecto del origen de coordenadas.

   a) $f\left(x\right)=x^3-x$; b) $g\left(x\right)=\dfrac{-x^2}{x^2-2}$

3. **[3 puntos]** Calcular, ***<u>de manera razonada</u>***, los siguientes límites (indica, en su caso, el tipo de indeterminación existente):

   a) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^4+x^3-1}{x^2+x}$; b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-3}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)$

4. **[2 puntos]** Dada la siguiente función definida por trozos, estudiar de manera razonada la continuidad en los puntos $x=-1$ y $x=2$. Caso de no ser continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{2} & \text{si} \quad x\le-1\\ \dfrac{2-x}{3} & \text{si} \quad -1<x\le2\\ \dfrac{x-1}{x-2} & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

5. Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{-x^3+4x}{x^2-1}$, se pide:

   a) **[0,6 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.

   b) **[1 punto]** Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

   c) **[0,4 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Hallar el dominio y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^2+2x-3}$. Puesto que $x^2+2x-3=0\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\x=1\end{cases}$, el dominio de f es $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}-\{-3,1\}$.

Puntos de corte con el eje X : $\dfrac{2x^2+3}{x^2+2x-3}=0\Rightarrow 2x^2+3=0\Rightarrow x^2=-\dfrac{3}{2}$, que no tiene solución. Por tanto f no corta al eje X .

Punto de corte con el eje Y: $x=0\Rightarrow f(0)=\dfrac{0+3}{0+0-3}=\dfrac{3}{-3}$. Por tanto, el punto de corte con el eje Y es $(0,-1)$

b) $g(x)=\sqrt{x+5}$. Puesto que $x+5\geq 0\Leftrightarrow x\geq -5$, el dominio de g es $\operatorname{Dom} g=[-5,\,+\infty)$.

Puntos de corte con el eje X : $\sqrt{x+5}=0\Rightarrow x+5=0\Rightarrow x=-5\Rightarrow$ el punto de corte con el eje X es $(-5,0)$.

Punto de corte con el eje Y: $x=0\Rightarrow f(0)=\sqrt{5}\Rightarrow$ el punto de corte con el eje Y es $\left(0,\sqrt{5}\right)$

2. **[1 punto]** Estudiar la simetría (par o impar) de las siguientes funciones. Caso de que sean simétricas decir si lo son respecto del eje Y o respecto del origen de coordenadas.

a) $f(x)=x^3-x$; $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x\neq f(x)$. Por tanto, f no es par.

Pero $-f(-x)=-\left(-x^3+x\right)=x^3-x=f(x)$. Entonces f es impar (simétrica respecto del origen de coordenadas).

b) $g(x)=\dfrac{-x^2}{x^2-2}$; $g(-x)=\dfrac{-(-x)^2}{(-x)^2-2}=\dfrac{-x^2}{x^2-2}=g(x)$. Por tanto, g es par (simétrica respecto del eje Y).

3. **[3 puntos]** Calcular, ***<u>de manera razonada</u>***, los siguientes límites (indica, en su caso, el tipo de indeterminación existente):

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{2x^4+x^3-1}{x^2+x}=\left[\frac{0}{0}\ \text{ INDETERMINACIÓN}\right]=(*)$

Para resolver esta indeterminación hemos de factorizar el polinomio del numerador y el del denominador, usando como factor $x+1$. Usando la regla de Ruffini se tiene que $2x^4+x^3-1=(x+1)\left(2x^3-x^2+x-1\right)$. Y, por otro lado, tenemos que $x^2+x=x(x+1)$. Entonces:

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(2x^3-x^2+x-1\right)}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x^3-x^2+x-1}{x}=\frac{-2-1-1-1}{-1}=\frac{-5}{-1}=5$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-3}-1}=\left[\frac{0}{0}\ \text{ INDETERMINACIÓN}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2-3}-1\right)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{x^2-3}+1}{\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2-1^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{x^2-3}+1}{x^2-3-1}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{x^2-3}+1}{x^2-4}=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\ \text{ INDETERMINACIÓN}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\sqrt{x^2-3}+1}{(x+2)(x-2)}==\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-3}+1}{x+2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Para resolver esta indeterminación hemos usado la técnica consistente en multiplicar y dividir por el conjugado del denominador, con el objetivo de escribir la fracción de manera equivalente y así poder simplificarla.

c) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)=\left[\infty-\infty \text{ INDETERMINACIÓN}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+x}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x}\right)^2-(2x)^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x-4x^2}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2+x}+2x}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$

Puesto que los grados del polinomio del numerador y del polinomio del denominador son ambos iguales a uno, se dividen los coeficientes líderes. Claramente el coeficiente líder del numerador es 1 y el del denominador es el del polinomio $\sqrt{4x^2}+2x=2x+2x=4x$, o sea, 4.

4. **[2 puntos]** Dada la siguiente función definida por trozos, estudiar de manera razonada la continuidad en los puntos $x=-1$ y $x=2$. Caso de no ser continua explicar el tipo de discontinuidad existente.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x}{2} & \text{si} \quad x\le -1\\ \dfrac{2-x}{3} & \text{si} \quad -1<x\le 2\\ \dfrac{x-1}{x-2} & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\dfrac{x^2-x}{2}=\dfrac{(-1)^2-(-1)}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1\\ \lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\dfrac{2-x}{3}=\dfrac{2-(-1)}{3}=\dfrac{3}{3}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to-1}f(x)=1=f(-1)\Rightarrow \ f \text{ es continua en } x=-1.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\dfrac{2-x}{3}=\dfrac{2-2}{3}=\dfrac{0}{3}=0\\ \lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2-1}{2-2}=\dfrac{1}{0}=+\infty\end{array}\right\}$$

. El segundo de los límites laterales es $+\infty$ porque si x tiende a 2 por la derecha tanto el numerador como el denominador son ambos positivos. En este caso, por ser distintos los límites laterales no existe el límite cuando x tiende a 2 de la función. Por tanto f no es continua en $x=2$. Hay una discontinuidad de salto infinito porque uno de los límites laterales es finito y el otro es infinito.

5. Dada la función $f(x)=\dfrac{-x^3+4x}{x^2-1}$, se pide:

a) **[0,6 puntos]** Dominio y puntos de corte con los ejes.

Puesto que $x^2-1=0\Leftrightarrow(x+1)(x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\x=1\end{cases}$, el dominio de f es $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

Puntos de corte con el eje X: $\dfrac{-x^3+4x}{x^2-1}=0\Leftrightarrow -x^3+4x=0\Leftrightarrow x\left(-x^2+4\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(2+x)(2-x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\x=-2\\x=2\end{cases}$. Entonces, los puntos de corte con el eje X son $(0,0)$, $(-2,0)$ y $(2,0)$

Punto de corte con el eje Y: $f(0)=\dfrac{-0^3+4\cdot0}{0^2-1}=\dfrac{0+0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$. De aquí se deduce que el punto de corte con el eje Y es el $(0,0)$ (como ya nos había salido antes podríamos haberlo dicho directamente).

b) **[1 punto]** Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

$$\lim_{x\to -1}\frac{-x^3+4x}{x^2-1}=\left[\frac{-3}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to -1^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to -1^+\end{cases} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{-x^3+4x}{x^2-1}=\left[\frac{3}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to 1^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to 1^+\end{cases}.$$

De aquí deducimos que $x=-1$ y $x=1$ son asíntotas verticales.

$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3+4x}{x^2-1}=\begin{cases}+\infty & \text{si} \quad x\to -\infty \\ -\infty & \text{si} \quad x\to +\infty\end{cases}$. Puesto que los límites en el infinito son también infinitos, la función no tiene asíntotas horizontales.

La función tiene una asíntota oblicua puesto que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador. Haciendo la división $-x^3+4x$ entre x^2-1 se obtiene de cociente $-x$. Entonces, la asíntota oblicua será la recta $y=-x$.

c) **[0,4 puntos]** Usando los apartados anteriores realiza una representación gráfica aproximada de la función.