1. **[1 punto]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{bx-1} & \text{si} \quad x\le -1 \\ -x^2+2ax & \text{si} \quad -1<x<2 \\ 2x^2-ax & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$, halla los valores de a y b para que f sea continua en $x=-1$ y en $x=2$.

2. **[1 punto]** Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-1}}{x-2} \;;\; \text{b) } \lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}\right)$$

3. **[3 puntos]** De la función siguiente calcula las asíntotas, los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Represéntala gráficamente.

$$f(x)=\frac{5x+8}{x^2+x+1}$$

Puntuación del ejercicio.
Cálculo de las asíntotas: **1 punto**. Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento: **1 punto**. Representación gráfica: **1 punto**.

4. **[1 punto]** Halla la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1-2x}$ en el punto $x=1$.

5. **[1 punto]** Dada $g(x)=ax^4+bx+c$, calcula los valores de a, b y c para que $g(x)$ tenga en el punto $(1,-1)$ un máximo relativo y la recta tangente a la gráfica de $g(x)$, en $x=0$, sea paralela a la recta $y=4x$.

6. **[3 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

$$\text{a) } f(x)=\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}+1} \;;\; \text{b) } f(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right) \;;\; \text{c) } f(x)=\ln(\operatorname{sen} x)-\frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Nota: en el apartado b), o bien antes de hacer la derivada, o bien a la hora de simplificarla, puedes utilizar las propiedades de los logaritmos

Soluciones

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{bx-1} & \text{si} \quad x\le -1\\ -x^2+2ax & \text{si} \quad -1<x<2\\ 2x^2-ax & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$; $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(-x^2+2ax\right)=-4+4a\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2x^2-ax\right)=8-2a\end{array}\right\}\Rightarrow$ para que f sea continua

en $x=2$ debe de ocurrir que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Rightarrow -4+4a=8-2a\Rightarrow 6a=12\Rightarrow a=2$.

Por otro lado: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+1}{bx-1}=\dfrac{2}{-b-1}\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(-x^2+2ax\right)=-5\end{array}\right\}\Rightarrow$ para que f sea continua en $x=-1$ estos dos límites laterales han de ser iguales para que exista el límite: $\dfrac{2}{-b-1}=-5\Rightarrow 2=5b+5\Rightarrow 5b=-3\Rightarrow b=-\dfrac{3}{5}$. Para este valor de b, f será continua en $x=-1$, pues se cumple que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)$.

2. Calcular los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-1}}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-3)-(x-1)}{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{x^2-9}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 3}\left(\frac{2}{x-3}-\frac{12}{(x+3)(x-3)}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{2x+6-12}{(x+3)(x-3)}=$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x+3)(x-3)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2}{x+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

3. $f(x)=\dfrac{5x+8}{x^2+x+1}$

La ecuación $x^2+x+1=0$ no tiene soluciones reales. Por tanto $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}$.

$\dfrac{5x+8}{x^2+x+1}=0\Rightarrow 5x+8=0\Rightarrow x=-\dfrac{8}{5}$. Por tanto el punto de corte con el eje X es $\left(-\dfrac{8}{5},\,0\right)$.

$\dfrac{5\cdot 0+8}{0^2+0+1}=\dfrac{8}{1}=8$, con lo que el punto de corte con el eje Y es $(0,\,8)$.

Como el denominador nunca se anula, no es posible que exista $k\in\mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to k} f(x)=\pm\infty$, es decir, la función ***no tiene asíntotas verticales***.

Por otro lado, se tiene que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x+8}{x^2+x+1}=0$, con lo que la recta $y=0$ (el eje X) ***es una asíntota horizontal***.

La función ***no tiene asíntotas oblicuas*** (entre otras cosas porque tiene una asíntota horizontal).

$$f'(x)=\frac{5\left(x^2+x+1\right)-(5x+8)(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{5x^2+5x+5-10x^2-5x-16x-8}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-5x^2-16x-3}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Para hallar los puntos críticos o singulares igualamos la derivada a cero y resolvemos la ecuación:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -5x^2-16x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=-\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

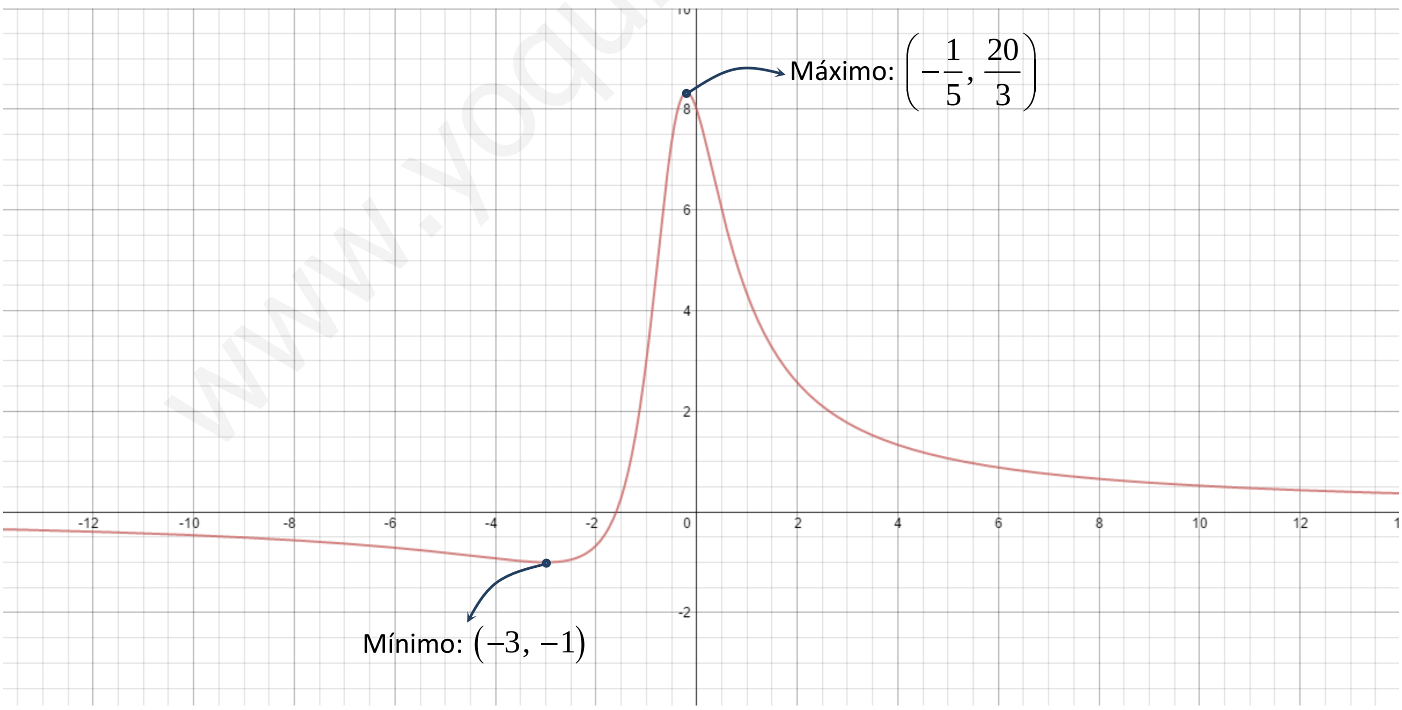
Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos:

	$(-\infty,\,-3)$	$\left(-3,\,-\frac{1}{5}\right)$	$\left(-\frac{1}{5},\,+\infty\right)$
Signo de f'	**−**	**+**	**−**
Monotonía	↓↓	↑↑	↓↓

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente decreciente en $(-\infty,\,-3)\cup\left(-\frac{1}{5},\,+\infty\right)$.
- f es estrictamente creciente en $\left(-3,\,-\frac{1}{5}\right)$.
- f tiene un mínimo relativo en $x=-3$; concretamente el mínimo relativo es $(-3,\,-1)$.
- f tiene un máximo relativo en $x=-\frac{1}{5}$; en concreto el máximo relativo es $\left(-\frac{1}{5},\,\frac{20}{3}\right)=(-0{,}2,\,8{,}3)$.

Representación gráfica:



4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1-2x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-2x)-\sqrt{x}(-2)}{(1-2x)^2}=\dfrac{1-2x+4x}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x}(1-2x)^2}$. Por tanto, se tiene que $f(1)=-1$ y $f'(1)=\frac{3}{2}$. Así, la recta tangente en $x=1$ es: $y-(-1)=\frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$.

5. $g(x)=ax^4+bx+c \Rightarrow g'(x)=4ax^3+b$

Como g tiene un máximo relativo en el punto $(1,\,-1)$, esto se traduce en dos condiciones: $g(1)=-1$, $g'(1)=0$. Además, como la recta tangente a la gráfica de $g(x)$, en $x=0$ es paralela a la recta $y=4x$, entonces $g'(0)=4$. Escribamos las tres condiciones anteriores en forma de sistema:

$\begin{cases} g(1)=-1 \\ g'(1)=0 \\ g'(0)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a+b=0 \\ b=4 \end{cases}$. De aquí es muy fácil deducir que $a=-1$, $b=4$ y $c=-4$.

6. Derivadas:

a) $$f(x)=\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot 2\left(\sqrt{x}+2\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)-2\left(\sqrt{x}+2\right)^2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(2\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(\sqrt{x}+2\right)\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

También se puede escribir la función desarrollando el cuadrado del numerador: $f(x)=\dfrac{2x+8\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+1}$.

$$f'(x)=\frac{\left(2+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)-\left(2x+8\sqrt{x}+8\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{\frac{\left(2\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}-\frac{x+4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=$$

$$=\frac{2x+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}+4-x-4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{x\sqrt{x}+2x}{x\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{x\left(\sqrt{x}+2\right)}{x\left(\sqrt{x}+1\right)^2}=\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$$

b) $$f(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\ln\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\ln 1-\ln x}\cdot\frac{x}{1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-x}{-x^2\ln x}=\frac{1}{x\ln x}$$

También se puede hacer así, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$f(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\ln 1-\ln x\right)=\ln\left(-\ln x\right) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{-\ln x}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x\ln x}$$

c) $$f(x)=\ln(\operatorname{sen} x)-\frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\cos x-\frac{\left(\cos x-x\operatorname{sen} x\right)\operatorname{sen} x-x\cos x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}-\frac{\cos x\operatorname{sen} x-x\operatorname{sen}^2 x-x\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\cos x\operatorname{sen} x-\cos x\operatorname{sen} x+x\operatorname{sen}^2 x+x\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\frac{x\left(\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x\right)}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{x}{\operatorname{sen}^2 x}$$