

1. [2 puntos] Dada la siguiente función definida por trozos,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx+1}{x^2-1} & \text{si } x \leq -2 \\ 2x+3 & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ \frac{3x-5}{-x+4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

- a) Hallar el valor de k para que f sea continua en el punto $x = -2$.
b) Estudiar la continuidad de f en el punto $x = 4$. Caso de no ser continua, decir el tipo de discontinuidad.

2. [2 puntos] Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - x)$

3. Dada la función $f(x) = \frac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6}$, se pide:

- a) [1,5 puntos] Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
b) [0,5 puntos] Puntos de corte con los ejes.
c) [1 punto] Representación gráfica aproximada. Representa también las asíntotas con trazo discontinuo.
4. [1 punto] Hallar la recta tangente a la gráfica de la función del ejercicio anterior en el punto $x = -3$.
5. [3 puntos] Calcular la derivada de las siguientes funciones. Simplificar y racionalizar el resultado.

a) $y = \left(-\sqrt{1-x^2} \right)^3$

b) $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$

Nota. Cada apartado se calificará del siguiente modo: **0,5 puntos** el cálculo de la derivada (primer paso); **1 punto** la simplificación y racionalización del resultado. Si el cálculo de la derivada es incorrecto se calificará con **0 puntos**.

Soluciones

1. [2 puntos] Dada la siguiente función definida por trozos,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx+1}{x^2-1} & \text{si } x \leq -2 \\ 2x+3 & \text{si } -2 < x \leq 4 \\ \frac{3x-5}{-x+4} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) Hallar el valor de k para que f sea continua en el punto $x = -2$.

Para que f sea continua en $x = -2$ se debe verificar que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$

Por un lado $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{kx+1}{x^2-1} = \frac{-2k+1}{3} = f(-2)$. Por otro lado $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (2x+3) = -1$

Por tanto $\frac{-2k+1}{3} = -1 \Rightarrow -2k+1 = -3 \Rightarrow -2k = -4 \Rightarrow k = 2$.

b) Estudiar la continuidad de f en el punto $x = 4$. Caso de no ser continua, decir el tipo de discontinuidad.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x+3) = 11 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x-5}{-x+4} = \left[\frac{7}{0} \right] = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x). \text{ Esto quiere decir que no existe el límite}$$

cuando x tiende a 4, con lo que f no es continua en $x = 4$: hay una discontinuidad de salto infinito.

2. [2 puntos] Calcular los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} \right) &= [\text{INDET } \infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x-2)-8}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x-2)} = \left[\text{INDET } \frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-4}{x-2} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) &= [\text{INDET } \infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. Dada la función $f(x) = \frac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6}$, se pide:

a) [1,5 puntos] Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Es fácil comprobar que $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$. Estudiemos pues los límites en los puntos $x = -2$ y $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6} = \left[\frac{12}{0} \right] = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+ \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6} = \left[\frac{10}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 3^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 3^+ \end{cases}$$

De lo anterior se deduce que $x = -2$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

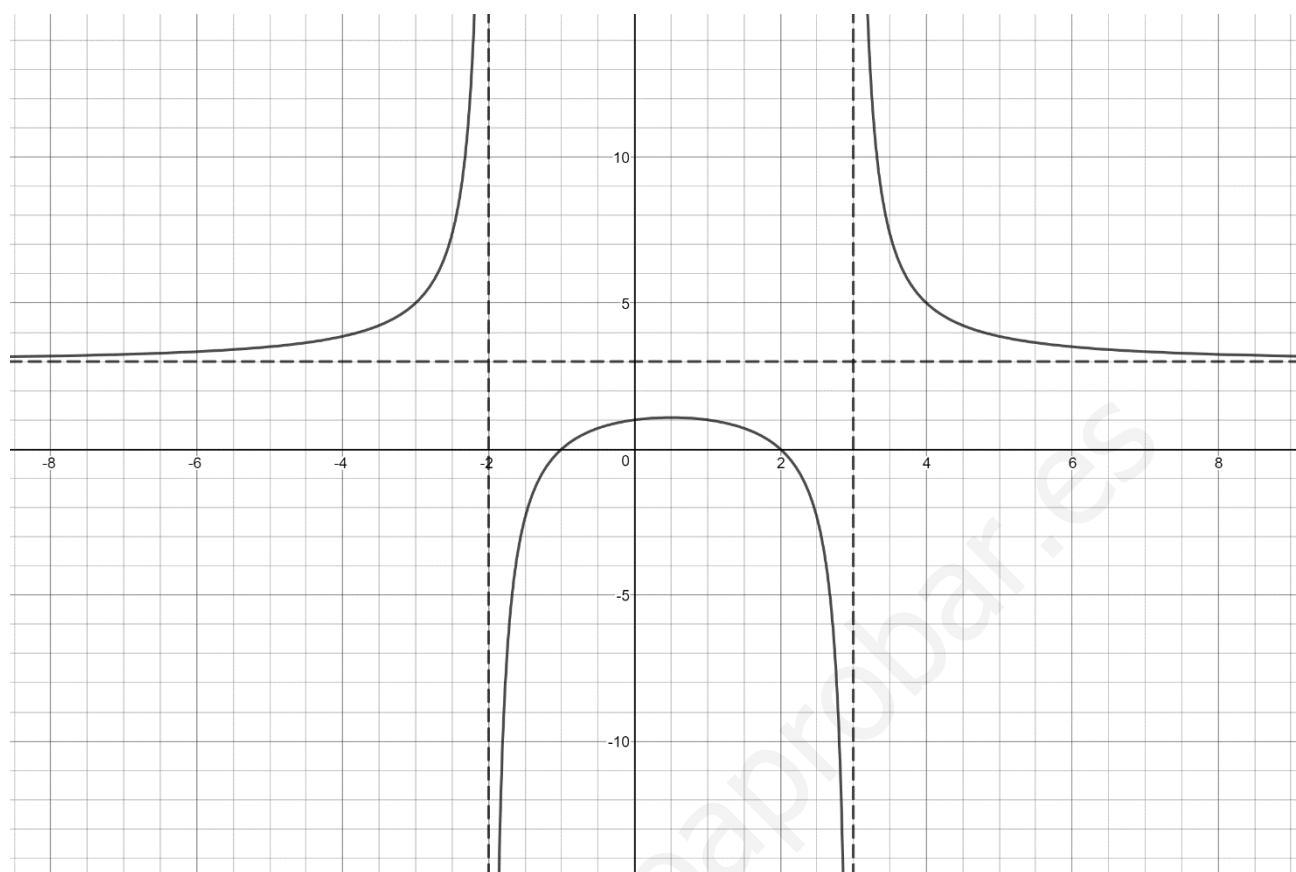
Estudiemos los límites en $+\infty$ y en $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6} = 3$. Entonces $y = 3$ es una asíntota horizontal. La función, al tener una asíntota horizontal, no puede tener asíntotas oblicuas.

b) [0,5 puntos] Puntos de corte con los ejes.

$$\frac{3x^2-3x-6}{x^2-x-6} = 0 \Rightarrow 3x^2-3x-6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}. \text{ Entonces los corte con el eje } X \text{ son } (-1, 0) \text{ y } (2, 0).$$

Si $x = 0$ tenemos que $y = 1$. Por tanto, el punto de corte con el eje Y es $(0, 1)$.

c) [1 punto] Representación gráfica aproximada. Representa también las asíntotas con trazo discontinuo.



4. [1 punto] Hallar la recta tangente a la gráfica de la función del ejercicio anterior en el punto $x = -3$.

La recta tangente es $y - f(-3) = f'(-3)(x + 3)$. Se tiene que $f(-3) = \frac{27 + 9 - 6}{9 + 3 - 6} = \frac{30}{6} = 5$. Hallemos ahora

$$\begin{aligned} \text{la derivada de } f : f'(x) &= \frac{(6x-3)(x^2-x-6) - (3x^2-3x-6)(2x-1)}{(x^2-x-6)^2} = \\ &= \frac{6x^3 - 6x^2 - 36x - 3x^2 + 3x + 18 - 6x^3 + 3x^2 + 6x^2 - 3x + 12x - 6}{(x^2-x-6)^2} = \frac{-24x + 12}{(x^2-x-6)^2} \end{aligned}$$

Entonces $f'(-3) = \frac{72 + 12}{(9 + 3 - 6)^2} = \frac{84}{36} = \frac{7}{3}$. Por tanto, la recta tangente en $x = -3$ es $y - 5 = \frac{7}{3}(x + 3)$.

5. [3 puntos] Calcular la derivada de las siguientes funciones. Simplificar y **racionalizar** el resultado.

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= (-\sqrt{1-x^2})^3 ; y' = 3(-\sqrt{1-x^2})^2 \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot (-2x) = 3(1-x^2) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{3x(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = 3x\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= \frac{2x-1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} ; y' = \frac{2\sqrt{x} - (2x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - \frac{2x-1}{2\sqrt{x}}}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\frac{4x - 2x + 1}{2\sqrt{x}}}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{2x+1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+1-x}{2x\sqrt{x}} = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}} = \frac{(x+1)\sqrt{x}}{2x^2} \end{aligned}$$