

1. **[2 puntos]** Sea la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ x^2 + 2x & \text{si } -1 < x < 2 \\ ax - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de f en $x = -1$. Caso de no ser continua di qué tipo de discontinuidad es, razonando la respuesta.
b) Halla razonadamente el valor de a para que f sea continua en $x = 2$.

2. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 - 3x + 5}{x^2 - x^3 - 3x + 1}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)^2}{25x^2 - 100}}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + x^2} - x^2)$; d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \frac{1}{x-1}}{x}$

3. **[3 puntos]** De la función siguiente calcular el dominio, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas. Hacer una representación gráfica aproximada de la misma.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$$

4. **[1 punto]** Hallar, usando la definición, la derivada de la función $f(x) = \frac{x^3}{1-2x}$ en el punto $x = 1$.
5. **[2 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$; b) $f(x) = \frac{x^3}{1-2x}$; c) $f(x) = (x^2 - x) \cdot \sqrt{x}$; d) $f(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \cdot \frac{1}{x}$

Soluciones

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ x^2 + 2x & \text{si } -1 < x < 2 \\ ax - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$a) \text{ Por un lado, tenemos: } \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 2x) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1. \text{ Por otro lado } f(-1) = 2.$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -1 \neq f(-1) = 2$, la función no es continua en $x = -1$. Hay una discontinuidad evitable.

$$b) \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 2x) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax - x^2) = 2a - 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{para que } f \text{ sea continua en } x = 2 \text{ debe de ocurrir que}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 2a - 4 = 8 \Rightarrow 2a = 12 \Rightarrow a = 6.$$

2. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 - 3x + 5}{x^2 - x^3 - 3x + 1} = \frac{-6}{-1} = 6$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)^2}{25x^2 - 100}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)^2}{25(x^2 - 4)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)^2}{25(x+2)(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{3(x-2)}{25(x+2)}} = \sqrt{\frac{0}{100}} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + x^2} - x^2) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^4 + x^2} - x^2)(\sqrt{x^4 + x^2} + x^2)}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 - x^4}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + x^2} + x^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \frac{1}{x-1}}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)\sqrt{x+1} + 1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((x-1)\sqrt{x+1} + 1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)}{x(x-1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2(x+1) - 1}{x(x-1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 - x}{x(x-1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - x - 1)}{x(x-1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)((x-1)\sqrt{x+1} - 1)} = \frac{-1}{-1 \cdot (-2)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$3. f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2}$$

Las soluciones de $x^2 - x - 2 = 0$ son $x = -1$ y $x = 2$. Por tanto $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

$$\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}. \text{ Puntos de corte con el eje } X : (-3, 0) \text{ y } (2, 0).$$

$$\frac{0^2 + 0 - 6}{0^2 - 0 - 2} = \frac{-6}{-2} = 3, \text{ con lo que el punto de corte con el eje } Y \text{ es } (0, 3).$$

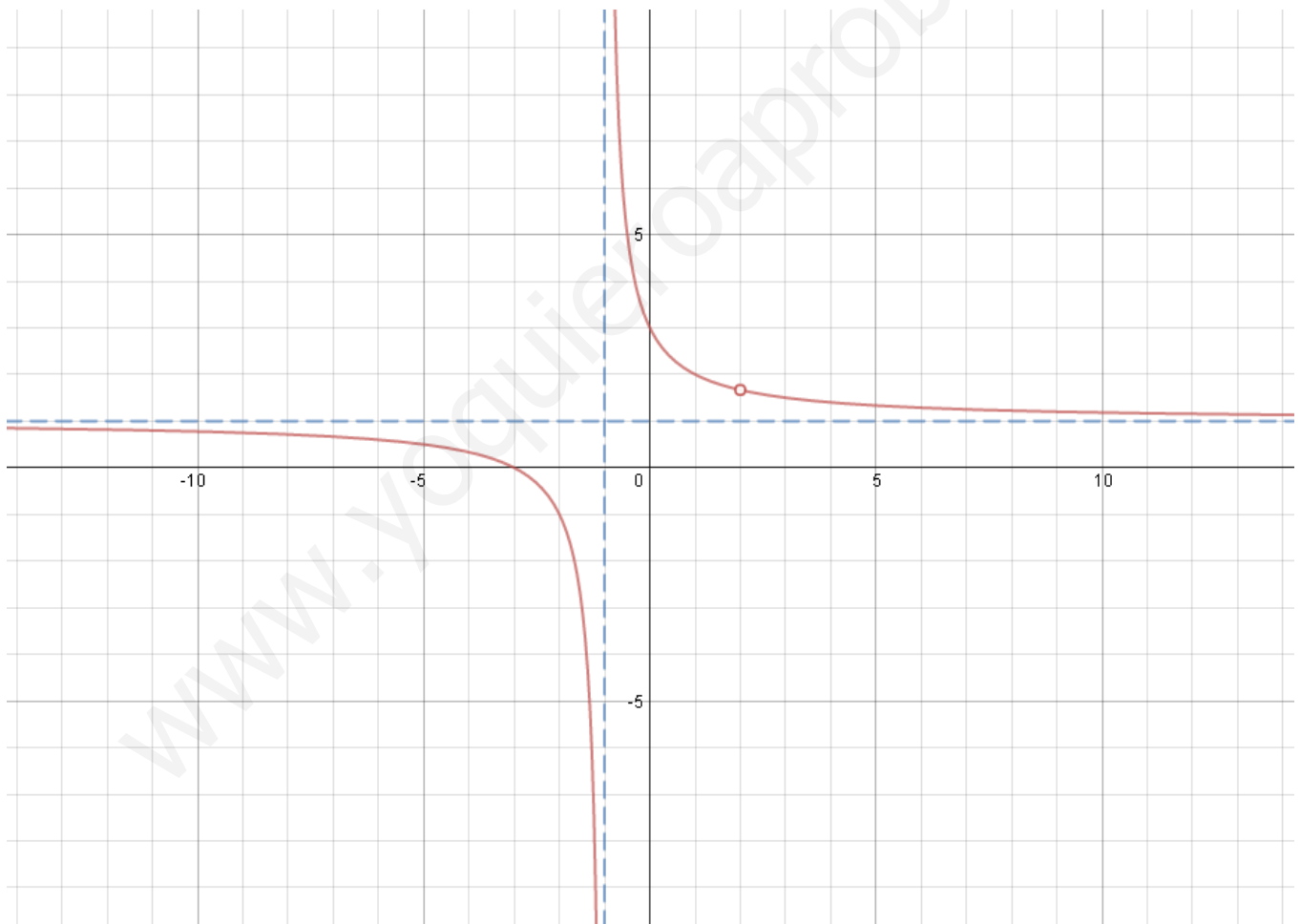
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{-6}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -1^+ \end{cases}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x+1} = \frac{5}{3}$$

De lo anterior se deduce que $x = -1$ es una asíntota vertical. En $x = 2$ no hay asíntota vertical; de hecho 2 no pertenece al dominio de la función y, por tanto, en $x = 2$ lo que hay es un punto de discontinuidad.

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{1} = 1, \text{ se tiene que } y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Esta función no tiene asíntotas oblicuas (entre otras cosas porque tiene una asíntota horizontal).

Representación gráfica:



$$\begin{aligned} 4. \quad f(x) &= \frac{x^3}{1-2x}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^3}{1-2x} - (-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x^3 + 1 - 2x}{1-2x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{(x-1)(1-2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 1)}{(x-1)(1-2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 1}{1-2x} = \frac{1}{-1} = -1. \text{ Por tanto } f'(1) = -1. \end{aligned}$$

5. Derivadas:

$$a) \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x^{1/2}}{x} = x^{1/2-1} = x^{-1/2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1/2-1} = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{3/2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

También se puede hacer mediante la regla de derivación de un cociente:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x - \sqrt{x} \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{x^2} = \frac{\frac{x-2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x^2} = \frac{x-2x}{2\sqrt{x} \cdot x^2} = \frac{x-2x}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{-x}{2x^2\sqrt{x}} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$b) \quad f(x) = \frac{x^3}{1-2x}; \quad f'(x) = \frac{3x^2(1-2x) - x^3(-2)}{(1-2x)^2} = \frac{3x^2 - 6x^3 + 2x^3}{(1-2x)^2} = \frac{-4x^3 + 3x^2}{(1-2x)^2} = \frac{x^2(-4x+3)}{(1-2x)^2}$$

$$c) \quad f(x) = (x^2 - x) \cdot \sqrt{x}. \text{ Usaremos la regla de derivación de un producto:}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-1)\sqrt{x} + (x^2-x) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}(2x-1)\sqrt{x} + x^2 - x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x(2x-1) + x^2 - x}{2\sqrt{x}} = \\ &= \frac{4x^2 - 2x + x^2 - x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 3x}{2\sqrt{x}} = \frac{x(5x-3)\sqrt{x}}{2x} = \frac{(5x-3)\sqrt{x}}{2} \end{aligned}$$

También se puede hacer usando las propiedades de las potencias:

$$f(x) = (x^2 - x) \cdot \sqrt{x} = (x^2 - x) \cdot x^{1/2} = x^{5/2} - x^{3/2}. \text{ Entonces:}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5}{2}x^{5/2-1} - \frac{3}{2}x^{3/2-1} = \frac{5}{2}x^{3/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3} - \frac{3}{2}\sqrt{x} = \frac{5\sqrt{x^3} - 3\sqrt{x}}{2} = \\ &= \frac{5x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}}{2} = \frac{(5x-3)\sqrt{x}}{2} \end{aligned}$$

$$d) \quad f(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{2x} - \frac{x^3}{3x} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{3}$$

Si se hace utilizando la regla de derivación de un producto sale igual, pero es un poco más largo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2} - x^2\right) \frac{1}{x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2x} - \frac{x^2}{x} - \frac{x}{2x^2} + \frac{x^3}{3x^2} = \\ &= \frac{1}{2x} - x - \frac{1}{2x} + \frac{x}{3} = -\frac{2x}{3} \end{aligned}$$