

1. **[2 puntos]** Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-3} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^3+x-7 & \text{si } -2 < x < 1, \\ \frac{3x^2-2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, estudiar la continuidad de la función en los

puntos $x = -2$ y en $x = 1$.

2. **[1 punto]** Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$; b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - \frac{x^2-1}{x+3} \right)$

3. **[3 puntos]** De la función siguiente calcula las asíntotas, los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Representala gráficamente.

$$f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8}$$

Puntuación del ejercicio.

Cálculo de las asíntotas: **1 punto**. Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento: **1 punto**. Representación gráfica: **1 punto**.

4. **[1 punto]** Halla la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{1-2\sqrt{x}}$ en el punto $x = 1$.

5. **[3 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

a) $f(x) = \ln \sqrt{1-\sqrt{x}}$; b) $f(x) = \frac{\ln x}{\sin x}$; c) $f(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{e^x} \right)$

Soluciones

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x-3} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^3+x-7 & \text{si } -2 < x < 1; \\ \frac{3x^2-2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{x^2+1}{x-3} \right) = \frac{5}{-5} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^3+x-7) = -(-8)+(-2)-7 = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -1$. Además, también $f(-2) = -1$. Por tanto $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = -1$, con lo que f es continua en $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^3+x-7) = -1+1-7 = -7 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3x^2-2}{x} \right) = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \text{ por tanto no existe el límite de la}$$

función en $x = 1$, con lo que f no es continua en $x = 1$. Hay una discontinuidad de salto finito.

2. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})}{(x^2 - x)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}^2}{(x^2 - x)(x + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x^2 - x)(x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + \sqrt{x}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-3} - \frac{x^2-1}{x+3} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2(x+3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{(x^2-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3+3x^2}{(x+3)(x-3)} - \frac{x^3-3x^2-x+3}{(x+3)(x-3)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+x-3}{x^2-9} = 6 \end{aligned}$$

$$3. f(x) = \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8}. \text{ Las soluciones de } x^2 - 2x - 8 = 0 \text{ son } x = -2 \text{ y } x = 4. \text{ Entonces } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 4\}.$$

Además, es claro que $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = \pm\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = \pm\infty$, por lo que $x = -2$ y $x = 4$ son asíntotas verticales.

También es claro que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2 - 2x - 8} = -2$, por lo que $y = -2$ es una asíntota horizontal.

La función no tiene asíntotas oblicuas (entre otras cosas porque tiene una horizontal).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4x(x^2 - 2x - 8) - (-2x^2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{-4x^3 + 8x^2 + 32x + 4x^3 - 4x^2}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \\ &= \frac{4x^2 + 32x}{(x^2 - 2x - 8)^2} = \frac{4x(x+8)}{(x^2 - 2x - 8)^2}. \text{ Entonces } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = -8 \end{aligned}$$

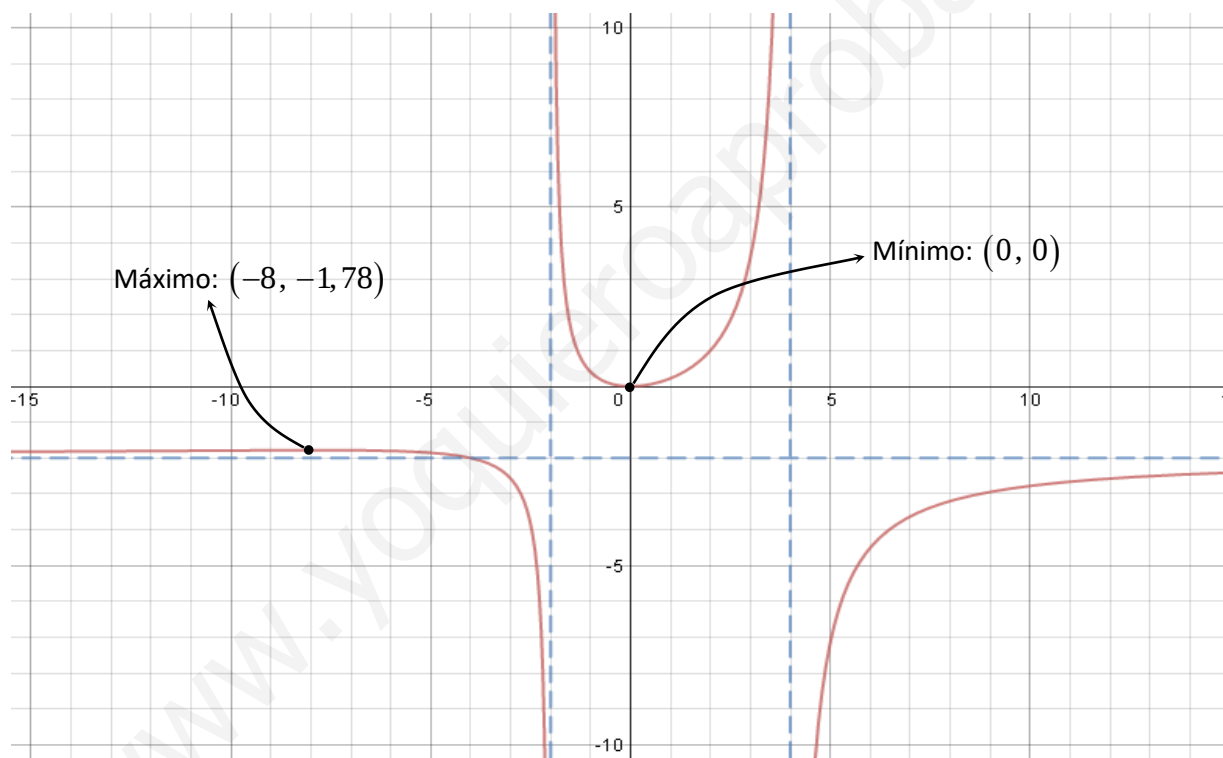
Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos:

	$(-\infty, -8)$	$(-8, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 4)$	$(4, +\infty)$
Signo de f'	+	-	-	+	+
Monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow$

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente creciente en $(-\infty, -8) \cup (0, 4) \cup (4, +\infty)$.
- f es estrictamente decreciente en $(-8, -2) \cup (-2, 0)$.
- f tiene un máximo relativo en $x = -8$; concretamente el mínimo relativo es $\left(-8, -\frac{16}{9}\right) = (-8, 1,78)$.
- f tiene un mínimo relativo en $x = 0$; en concreto el máximo relativo es $(0, 0)$.

Representación gráfica:



$$4. \quad f(x) = \frac{x}{1-2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (1-2\sqrt{x}) - x \cdot \left(-2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(1-2\sqrt{x})^2} = \frac{1-2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}}{(1-2\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - 2x + x}{\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})^2} = \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x}(1-2\sqrt{x})^2}.$$

Por tanto, se tiene que $f(1) = \frac{1}{1-2} = -1$, y que $f'(1) = \frac{1-1}{1 \cdot (-1)^2} = 0$. Por tanto, la recta tangente en $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - (-1) = 0(x-1) \Rightarrow y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

No se pide en el ejercicio, pero es interesante mostrar que de lo anterior se deduce que en el punto $x = 1$ la gráfica de f tienen tangente horizontal, con lo que es muy probable que $x = 1$ sea un extremo relativo.

5. Derivadas:

$$a) \quad f(x) = \ln \sqrt{1-\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{4\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$$

Así está bien, aunque también se puede expresar la derivada de la siguiente manera:

$$f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \frac{-1}{4\sqrt{x}-4x} = \frac{-1(4\sqrt{x}+4x)}{(4\sqrt{x}-4x)(4\sqrt{x}+4x)} = \frac{-4\sqrt{x}-4x}{16x-16x^2} = \frac{-\sqrt{x}-x}{4x-4x^2} = \frac{x+\sqrt{x}}{4x^2-4x}$$

Hay otra forma de hacer la derivada, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \ln \sqrt{1-\sqrt{x}} = \ln (1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln (1-\sqrt{x})$$

$$\text{Entonces: } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{-1}{4\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$$

$$b) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sin x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sin x - \ln x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - x \ln x \cos x}{x \sin^2 x}$$

$$c) \quad f(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{e^x} \right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{\sin x}{e^x}} \cdot \frac{\cos x \cdot e^x - \sin x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x}{\sin x} \cdot \frac{e^x (\cos x - \sin x)}{(e^x)^2} =$$

$$= \frac{(e^x)^2 (\cos x - \sin x)}{\sin x (e^x)^2} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x - 1$$

Hay otra forma de hacer la derivada, aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

$$f(x) = \ln \left(\frac{\sin x}{e^x} \right) = \ln (\sin x) - \ln e^x = \ln (\sin x) - x$$

$$\text{Entonces: } f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x - 1 = \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = \operatorname{ctg} x - 1$$