1. **[1 punto]** Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & \text{si} \quad x<-1 \\ 2 & \text{si} \quad x=-1 \\ x^2+2x & \text{si} \quad -1<x<2 \\ ax-x^2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$, estudia la continuidad de f en $x=-1$ y halla el valor de a para que f sea continua en $x=2$.

2. **[1 punto]** Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}{x} \ ; \ \text{b) } \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{-x^2}{x-3}-\frac{1-x^3}{x^2-9}\right)$$

3. **[3 puntos]** De la función siguiente calcula las asíntotas, los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Represéntala gráficamente.

$$f(x)=\frac{-2x^2}{x^2-2x-8}$$

Puntuación del ejercicio.
Cálculo de las asíntotas: **1 punto**. Máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento: **1 punto**. Representación gráfica: **1 punto**.

4. **[1 punto]** Halla la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2+4}{\sqrt{x}}$ en el punto $x=1$.

5. **[1 punto]** Halla una función polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto $(1,\,-1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto $(0,\,-3)$ vale 0.

6. **[3 puntos]** Hallar la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado en la medida de lo posible:

$$\text{a) } f(x)=\ln\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} \ ; \ \text{b) } f(x)=\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x} \ ; \ \text{c) } f(x)=\ln\left(\frac{\cos x+1}{\operatorname{sen} x}\right)$$

Soluciones

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x-1} & \text{si} \quad x<-1\\ 2 & \text{si} \quad x=-1\\ x^2+2x & \text{si} \quad -1<x<2\\ ax-x^2 & \text{si} \quad x\geq 2\end{cases}$

Por un lado tenemos: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2}{x-1}=\dfrac{2}{-2}=-1\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2+2x\right)=-1\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$. Por otro lado $f(-1)=2$. Como

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1\neq f(-1)=2$, la función no es continua en $x=-1$. Hay una discontinuidad evitable.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+2x\right)=8\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(ax-x^2\right)=2a-4\end{array}\right\}\Rightarrow$ para que f sea continua en $x=2$ debe de ocurrir que

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Rightarrow 2a-4=8\Rightarrow 2a=12\Rightarrow a=6$.

2. Calcular los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)\sqrt{x+1}+1}{x(x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left((x-1)\sqrt{x+1}+1\right)\left((x-1)\sqrt{x+1}-1\right)}{x(x-1)\left((x-1)\sqrt{x+1}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)^2(x+1)-1}{x(x-1)\left((x-1)\sqrt{x+1}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2-x}{x(x-1)\left((x-1)\sqrt{x+1}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(x^2-x-1\right)}{x(x-1)\left((x-1)\sqrt{x+1}-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x-1}{(x-1)\left((x-1)\sqrt{x+1}-1\right)}=\frac{-1}{-1\cdot(-2)}=-\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{-x^2}{x-3}-\frac{1-x^3}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{-x^2}{x-3}-\frac{1-x^3}{(x+3)(x-3)}\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x^2(x+3)-\left(1-x^3\right)}{(x+3)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x^3-3x^2-1+x^3}{x^2-9}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-3x^2-1}{x^2-9}=-3$$

3. $f(x)=\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}$. Las soluciones de $x^2-2x-8=0$ son $x=-2$ y $x=4$. Entonces $\text{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{-2\ ,\ 4\}$.

Además, es claro que $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=\pm\infty$, por lo que $x=-2$ y $x=4$ son asíntotas verticales.

También es claro que $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{-2x^2}{x^2-2x-8}=-2$, por lo que $y=-2$ es una asíntota horizontal.

La función no tiene asíntotas oblicuas (entre otras cosas porque tiene una horizontal).

$$f'(x)=\frac{-4x\left(x^2-2x-8\right)-\left(-2x^2\right)\left(2x-2\right)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{-4x^3+8x^2+32x+4x^3-4x^2}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=$$

$=\frac{4x^2+32x}{\left(x^2-2x-8\right)^2}=\frac{4x(x+8)}{\left(x^2-2x-8\right)^2}$. Entonces $f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x(x+8)=0 \Leftrightarrow x=0\ ;\ x=-8$

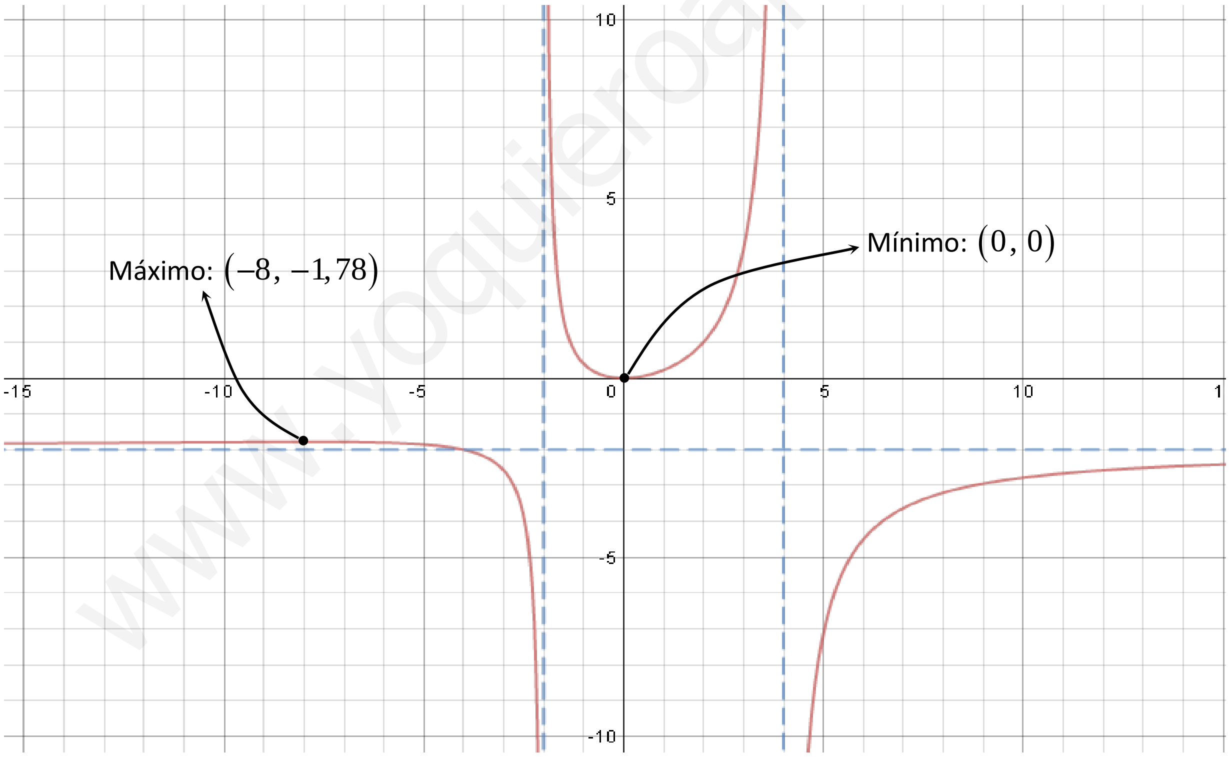
Ahora decidimos la monotonía y los extremos relativos:

	$(-\infty,-8)$	$(-8,-2)$	$(-2,0)$	$(0,4)$	$(4,+\infty)$
Signo de f'	**–**	**+**	**–**		
Monotonía	$\uparrow\uparrow$	$\downarrow\downarrow$	$\downarrow\downarrow$	$\uparrow\uparrow$	$\uparrow\uparrow$

De la tabla anterior se deduce que:

- f es estrictamente decreciente en $(-\infty,-8)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$.
- f es estrictamente creciente en $(-8,-2)\cup(-2,0)$.
- f tiene un máximo relativo en $x=-8$; concretamente el mínimo relativo es $\left(-8,-\frac{16}{9}\right)=(-8,1{,}78)$.
- f tiene un mínimo relativo en $x=0$; en concreto el máximo relativo es $(0,0)$.

Representación gráfica:



4. $f(x)=\frac{x^2+4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x\sqrt{x}-\left(x^2+4\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2}=\frac{4x^2-\left(x^2+4\right)}{2x\sqrt{x}}=\frac{3x^2-4}{2x\sqrt{x}}$

Entonces $f(1)=\frac{1^2+4}{\sqrt{1}}=\frac{5}{1}=5$ y $f'(1)=\frac{3\cdot 1^2-4}{2\cdot 1\cdot\sqrt{1}}=\frac{3-4}{2}=\frac{-1}{2}$. Por tanto, la ecuación de la recta tangente en el punto $x=1$ es: $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-5=\frac{-1}{2}(x-1)\Rightarrow y=\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}+5\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{11}{2}$.

5. Una función polinómica de segundo grado es de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$. Su derivada es $f'(x)=2ax+b$ Como pasa por el punto $(1,-1)$ se tiene que $f(1)=-1$, es decir, $a+b+c=-1$. También pasa por el punto $(0,-3)$ donde la recta tangente vale 0, o sea, $f(0)=3$ y $f'(0)=0$. Por tanto $c=-3$ y $b=0$. Sustituyendo en $a+b+c=-1$, se tiene que $a+0+(-3)=-1 \Rightarrow a=2$. Por tanto la función es $f(x)=2x^2-3$.

6. Derivadas.

a) $$f(x)=\ln\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}}\frac{2(x+3)-(2x+1)1}{(x+3)^2}=\frac{1}{2\frac{2x+1}{x+3}}\cdot\frac{2x+6-2x-1}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{x+3}{2(2x+1)}\cdot\frac{5}{(x+3)^2}=\frac{5(x+3)}{2(2x+1)(x+3)^2}=\frac{5}{2(2x+1)(x+3)}$$

b) $$f(x)=\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x} \Rightarrow f'(x)=\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)\left(\sqrt{x}-x\right)-\left(\sqrt{x}+x\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-x\right)^2}=$$

$$=\frac{\frac{\left(1+2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-x\right)}{2\sqrt{x}}-\frac{\left(\sqrt{x}+x\right)\left(1-2\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}-x\right)^2}=\frac{\sqrt{x}-x+2x-2x\sqrt{x}-\sqrt{x}+2x-x+2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-x\right)^2}=$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-x\right)^2}=\frac{x}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-x\right)^2}=\frac{x}{\sqrt{x}\left(x-2x\sqrt{x}+x^2\right)}=\frac{x}{x\sqrt{x}\left(1-2\sqrt{x}+x\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$$

c) $$f(x)=\ln\left(\frac{\cos x+1}{\operatorname{sen} x}\right)\Rightarrow\frac{1}{\frac{\cos x+1}{\operatorname{sen} x}}\cdot\frac{-\operatorname{sen} x\operatorname{sen} x-(\cos x+1)\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+1}\cdot\frac{-\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+1}\cdot\frac{-1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\operatorname{sen} x(-1-\cos x)}{(\cos x+1)\operatorname{sen}^2 x}=\frac{-(1+\cos x)}{(\cos x+1)\operatorname{sen} x}=\frac{-1}{\operatorname{sen} x}$$