1. **[2 puntos]** Dada la siguiente función definida por trozos,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2}{x^2-4} & \text{si} \quad x\le -2\\ x-3 & \text{si} \quad -2<x\le 4\\ \dfrac{kx-5}{x-1} & \text{si} \quad x>4\end{cases}$$

   a) Estudiar la continuidad de f en el punto $x=-2$. Caso de no ser continua, decir el tipo de discontinuidad.

   b) Hallar el valor de k para que f sea continua en el punto $x=4$.

2. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x}{x^2-1}\right)$

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x\sqrt{x}-\sqrt{x^3+1}\right)$

3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+1}$, se pide:

   a) **[1,5 puntos]** Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

   b) **[0,5 puntos]** Puntos de corte con los ejes.

   c) **[1 punto]** Representación gráfica aproximada. Representa también las asíntotas con trazo discontinuo.

4. **[1 punto]** Hallar la recta tangente a la gráfica de la función del ejercicio anterior en el punto $x=-2$.

5. **[3 puntos]** Calcular la derivada de las siguientes funciones. Simplificar y ***racionalizar*** el resultado.

   a) $y=\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^2$

   b) $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

   Nota. Cada apartado se calificará del siguiente modo: **0,5 puntos** el cálculo de la derivada (primer paso); **1 punto** la simplificación y racionalización del resultado. Si el cálculo de la derivada es incorrecto se calificará con **0 puntos**.

Soluciones

1. **[2 puntos]** Dada la siguiente función definida por trozos,

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2}{x^2-4} & \text{si} \quad x\le -2 \\ x-3 & \text{si} \quad -2<x\le 4 \\ \dfrac{kx-5}{x-1} & \text{si} \quad x>4 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f en el punto $x=-2$. Caso de no ser continua, decir el tipo de discontinuidad.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{-x^2}{x^2-4}=\left[\dfrac{-4}{0}\right]=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+}(x-3)=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to -2^-} f(x)\neq \lim_{x\to -2^+} f(x)$$

Esto quiere decir que no existe el límite cuando x tiende a 4, con lo que f no es continua en $x=4$: hay una discontinuidad de salto infinito.

b) Hallar el valor de k para que f sea continua en el punto $x=4$.

Por un lado $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(x-3)=1=f(4)$. Por otro lado $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{kx-5}{x-1}=\dfrac{4k-5}{3}$

Por tanto, $\dfrac{4k-5}{3}=1\Rightarrow 4k-5=3\Rightarrow 4k=8\Rightarrow k=2$.

2. **[2 puntos]** Calcular los siguientes límites:

a) $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2-1}\right)=\left[\text{INDET } \infty-\infty\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1(x+1)-x}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\left[\frac{1}{0}\right]=\begin{cases}-\infty & \text{si} \quad x\to 1^- \\ +\infty & \text{si} \quad x\to 1^+\end{cases}$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x}-\sqrt{x^3+1}\right)=\left[\text{INDET } \infty-\infty\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x\sqrt{x}-\sqrt{x^3+1}\right)\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x^3+1}\right)}{x\sqrt{x}+\sqrt{x^3+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-\left(x^3+1\right)}{x\sqrt{x}+\sqrt{x^3+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x\sqrt{x}+\sqrt{x^3+1}}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+1}$, se pide:

a) **[1,5 puntos]** Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

Es fácil comprobar que $\text{Dom } f=\mathbb{R}$, ya que el denominador nunca se anula: $2x^2-x+1\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

De lo anterior se deduce que la función no tiene asíntotas verticales.

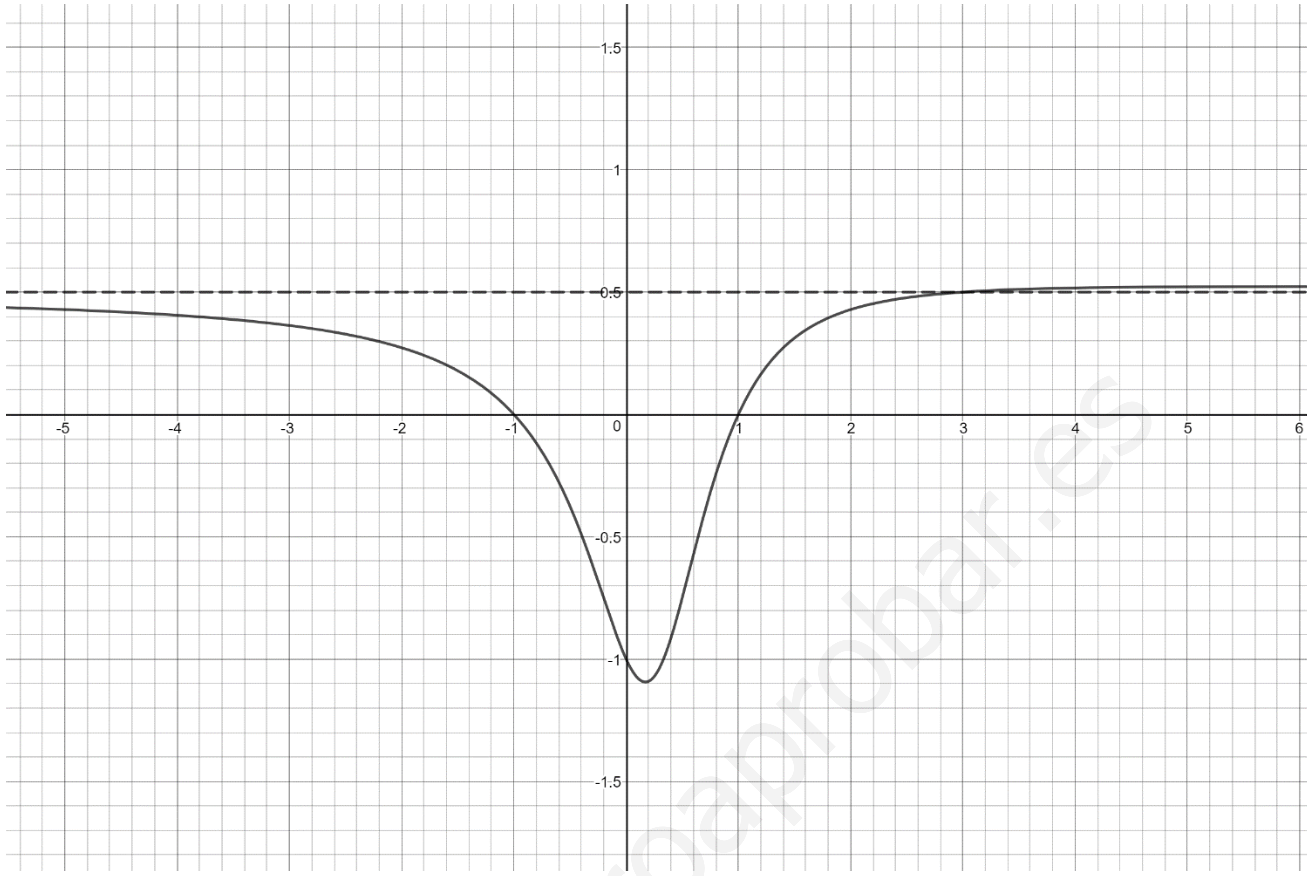
Estudiemos los límites en $+\infty$ y en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+1}=\dfrac{1}{2}$. Entonces $y=\dfrac{1}{2}$ es una asíntota horizontal. La función, al tener una asíntota horizontal, no puede tener asíntotas oblicuas.

b) **[0,5 puntos]** Puntos de corte con los ejes.

$\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+1}=0\Rightarrow x^2-1=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=1\end{cases}$. Entonces los cortes con el eje X son $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Si $x=0$ tenemos: $y=\dfrac{0^2-1}{2\cdot 0^2-0+1}=\dfrac{-1}{1}\Rightarrow y=-1$. Por tanto, el punto de corte con el eje Y es $(0,-1)$.

c) **[1 punto]** Representación gráfica aproximada. Representa también las asíntotas con trazo discontinuo



4. **[1 punto]** Hallar la recta tangente a la gráfica de la función del ejercicio anterior en el punto $x=-2$.

La recta tangente es $y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$. Se tiene que $f(-2)=\frac{4-1}{8+2+1}=\frac{3}{11}$. Por otro lado:

$$f'(x)=\frac{2x\left(2x^2-x+1\right)-\left(x^2-1\right)(4x-1)}{\left(2x^2-x+1\right)^2}=\frac{4x^3-2x^2+2x-4x^3+x^2+4x-1}{\left(2x^2-x+1\right)^2}=\frac{-x^2+6x-1}{\left(x^2-x-6\right)^2}$$

Entonces $f'(-2)=\frac{-4-12-1}{(8+2+1)^2}=\frac{-17}{121}$. Por tanto, la recta tangente en $x=-2$ es $y-\frac{3}{11}=\frac{-17}{121}(x+2)$.

5. **[3 puntos]** Calcular la derivada de las siguientes funciones. Simplificar y ***racionalizar*** el resultado.

a) $y=\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)^2$; $y'=2\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)=\left(2+2\sqrt{x^2+1}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{2x+2\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=$

$$=\frac{\left(2x+2\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}=\frac{2x\sqrt{x^2+1}+2x^2+2}{x^2+1}$$

b) $y=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $y'=\frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}-\left(x+\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{2}-\frac{x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}}{x}=\frac{\frac{2x-x}{2\sqrt{x}}}{x}=$

$$=\frac{x}{2x\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2x}$$