

EJERCICIOS – NÚMEROS COMPLEJOS

1. Realiza las siguientes operaciones con números complejos:

a. $4i + (3 - 5i) - (2 + i)$

b. $2 \cdot \left(3 - \frac{1}{2}i\right) - 3 \cdot (-1 + i)$

c. $(4 - 2i) \cdot (5 + 3i)$

d. $(3 + i) \cdot (3 - i)$

e. $(2 + 3i)^2$

f. $(6 - 2i)^2$

g. $\frac{1+3i}{3-i}$

h. $\frac{2-5i}{4+2i}$

i. $\frac{5}{2i}$

j. $\frac{-1-i}{i}$

2. Halla los valores de:

a. i^{17}

b. i^{50}

c. i^{301}

d. i^{723}

e. $i^{1000} + i^{485}$

f. $1 + 2 \cdot i^{48}$

g. $i^{18} \cdot (4 + 2i)$

h. $\frac{i^{13}}{i^7}$

i. $\frac{i^9}{1+i}$

j. $\frac{i^{402}}{i^{500} - i^{274}}$

3. Dados los siguientes números complejos en forma binómica:

$$z_1 = 2 + 2i$$

$$z_2 = -3 + 4i$$

$$z_3 = 1 - 2i$$

- Halla sus opuestos y sus conjugados
- Representa gráficamente los números con sus conjugados y sus opuestos.
- Expresa los números dados, z_1 , z_2 y z_3 , en forma polar y en forma trigonométrica.

4. Halla las soluciones expresadas en números complejos de las siguientes ecuaciones:

a. $x^2 + 2x + 10 = 0$

b. $x^2 + 1 = 0$

c. $x^2 - 3x + 3 = 0$

Soluciones - Ejercicios - Números Complejos

①

$$a) 4i + (3 - 5i) - (2 + i) = 4i + 3 - 5i - 2 - i = \boxed{1 - 2i}$$

$$b) 2 \cdot \left(3 - \frac{1}{2}i\right) - 3(-1 + i) = 6 - i + 3 - 3i = \boxed{9 - 4i}$$

$$c) (4 - 2i) \cdot (5 + 3i) = 20 + 12i - 10i - 6i^2 = 20 + 2i + 6 = \boxed{26 + 2i}$$

$$d) (3 + i) \cdot (3 - i) = 9 - 3i + 3i - i^2 = 9 + 1 = \boxed{10} \quad (i^2 = -1)$$

$$e) (2 + 3i)^2 = (2 + 3i) \cdot (2 + 3i) = 4 + 6i + 6i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = \boxed{-5 + 12i}$$

$$f) (6 - 2i)^2 = (6 - 2i) \cdot (6 - 2i) = 36 - 12i - 12i + 4i^2 = 36 - 24i - 4 = \boxed{32 - 24i}$$

$$g) \frac{1 + 3i}{3 - i} = \frac{(1 + 3i) \cdot (3 + i)}{(3 - i) \cdot (3 + i)} = \frac{3 + i + 9i + 3i^2}{9 + 3i - 3i - i^2} = \frac{3 + 10i - 3}{9 + 1} = \frac{10i}{10} = \boxed{i}$$

$$h) \frac{2 - 5i}{4 + 2i} = \frac{(2 - 5i) \cdot (4 - 2i)}{(4 + 2i) \cdot (4 - 2i)} = \frac{8 - 4i - 20i + 10i^2}{16 - 8i + 8i - 4i^2} = \frac{8 - 24i - 10}{16 + 4} = \frac{-2 - 24i}{20} =$$

$$i) \frac{5}{2i} = \frac{5i}{2i^2} = \frac{5i}{-2} = \boxed{-\frac{5}{2}i}$$

$$= \frac{-2}{20} - \frac{24}{20}i = \boxed{-\frac{1}{10} - \frac{6}{5}i}$$

$$j) \frac{-1 - i}{i} = \frac{(-1 - i) \cdot i}{i^2} = \frac{-i - i^2}{-1} = \frac{-i + 1}{-1} = \frac{-i}{-1} + \frac{1}{-1} = i - 1 = \boxed{-1 + i}$$

②

$$a) i^{17} = i^{4 \cdot 4 + 1} = (i^4)^4 \cdot i^1 = 1^4 \cdot i = \boxed{i}$$

$$b) i^{50} = i^{12 \cdot 4 + 2} = (i^4)^{12} \cdot i^2 = 1^{12} \cdot i^2 = i^2 = \boxed{-1}$$

$$c) i^{301} = i^{4 \cdot 75 + 1} = (i^4)^{75} \cdot i^1 = 1^{75} \cdot i = \boxed{i}$$

$$d) i^{723} = i^{180 \cdot 4 + 3} = (i^4)^{180} \cdot i^3 = 1^{180} \cdot i^3 = i^3 = \boxed{-i}$$

$$e) i^{1000} + i^{485} = i^{250 \cdot 4} + i^{4 \cdot 121 + 1} = (i^4)^{250} + (i^4)^{121} \cdot i^1 = 1^{250} + 1^{121} \cdot i = \boxed{1 + i}$$

$$f) 1 + 2i^{48} = 1 + 2 \cdot i^{4 \cdot 12} = 1 + 2 \cdot (i^4)^{12} = 1 + 2 \cdot 1 = \boxed{3}$$

$$g) i^{18} (4+2i) = i^{4 \cdot 4 + 2} (4+2i) = (i^4)^4 \cdot i^2 \cdot (4+2i) = i^2 (4+2i) = 4i^2 + 2i^3 =$$

$$\begin{array}{r} 18 \overline{) 4} \\ 2 \overline{) 4} \end{array}$$

$$= \boxed{-4 - 2i}$$

$$h) \frac{i^{13}}{i^7} = i^6 = i^4 \cdot i^2 = i^2 = \boxed{-1} \quad \text{otra forma: } \frac{i^{13}}{i^7} = \frac{i^{4 \cdot 3 + 1}}{i^{4 \cdot 1 + 3}} = \frac{(i^4)^3 \cdot i^1}{i^4 \cdot i^3} = \frac{i}{i^3} = \frac{i}{-i} = \boxed{-1}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 4} \\ 2 \overline{) 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 4} \\ 4 \overline{) 3} \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \overline{) 4} \\ 3 \overline{) 1} \end{array}$$

$$i) \frac{i^9}{(1+i)} = \frac{i^{4 \cdot 2 + 1}}{1+i} = \frac{(i^4)^2 \cdot i^1}{1+i} = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i - i^2}{1 - i^2} = \frac{i + 1}{1 + 1} = \frac{1+i}{2} = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 4} \\ 1 \overline{) 2} \end{array}$$

$$j) \frac{i^{402}}{i^{500} - i^{274}} = \frac{i^{4 \cdot 100 + 2}}{i^{4 \cdot 125} - i^{4 \cdot 68 + 2}} = \frac{(i^4)^{100} \cdot i^2}{(i^4)^{125} - (i^4)^{68} \cdot i^2} = \frac{i^2}{1 - i^2} = \frac{i^2}{1 - (-1)} = \frac{-1}{1 + 1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

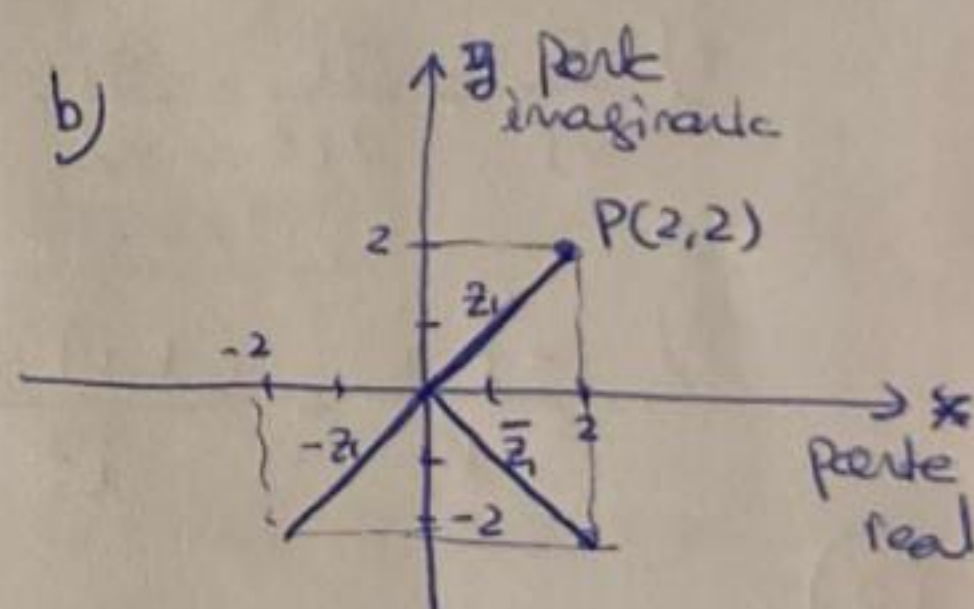
$$\begin{array}{r} 402 \overline{) 4} \\ 00 \overline{) 100} \\ 02 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 500 \overline{) 4} \\ 10 \overline{) 125} \\ 20 \overline{) 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 274 \overline{) 4} \\ 34 \overline{) 68} \\ 2 \end{array}$$

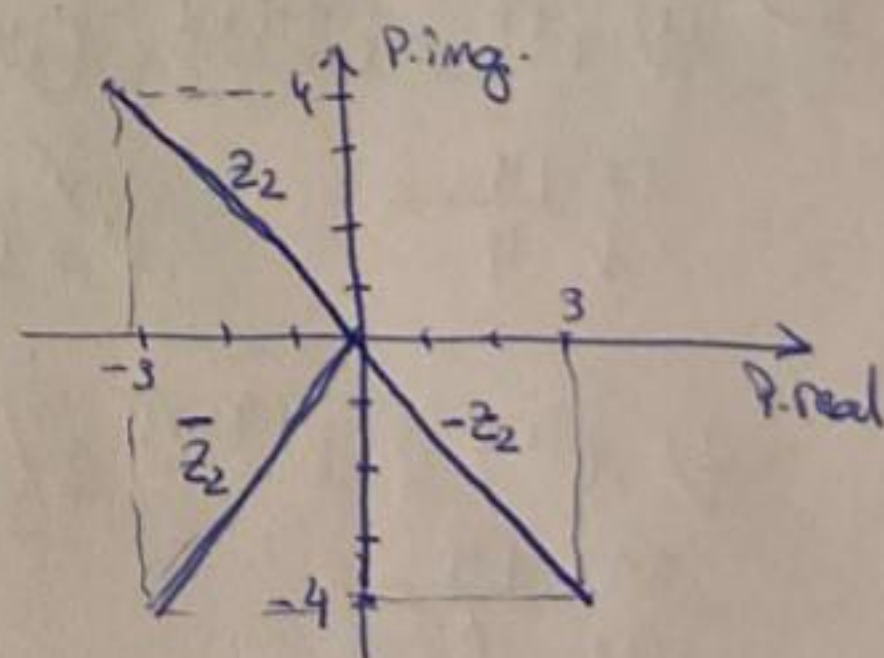
$$= \frac{-1}{1+1} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

3) a) Opuesto de z_1 es $-z_1 \Rightarrow -z_1 = -2 - 2i$
 Conjugado de $z_1 \Rightarrow \overline{z_1} = 2 - 2i$



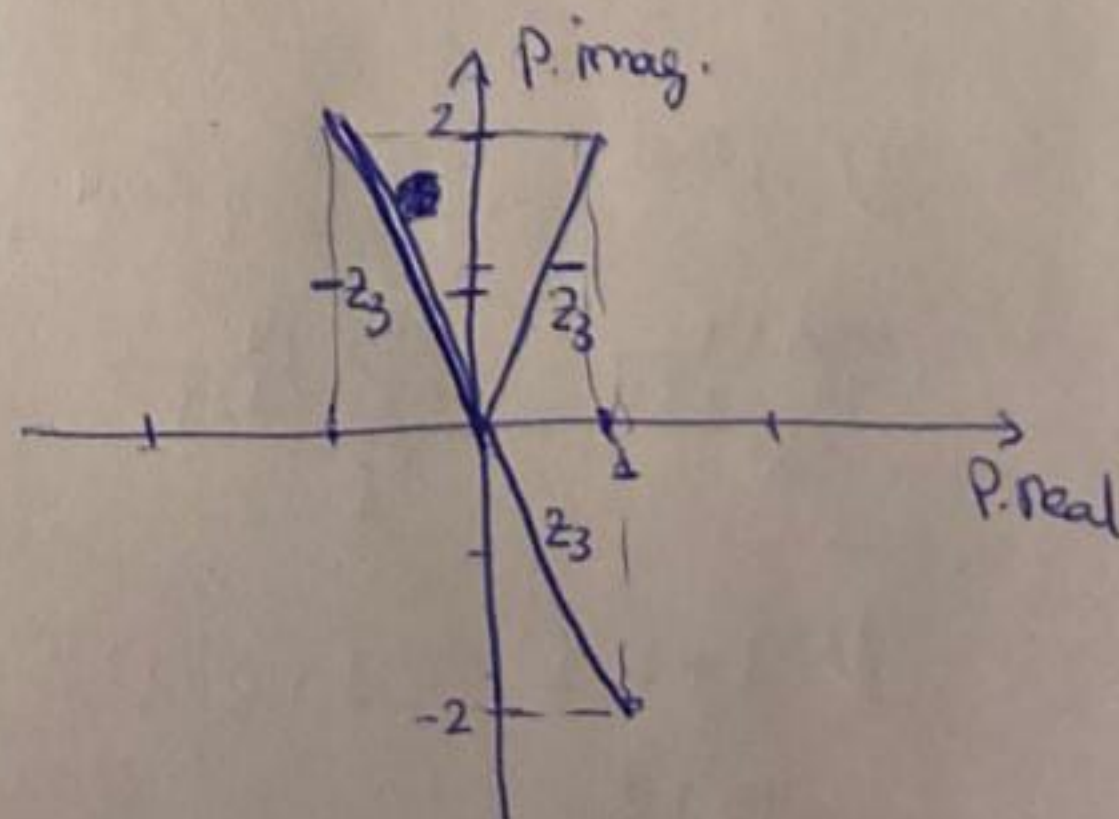
Opuesto de z_2 : $-z_2 = 3 - 4i$

Conjugado de z_2 : $\overline{z_2} = -3 - 4i$

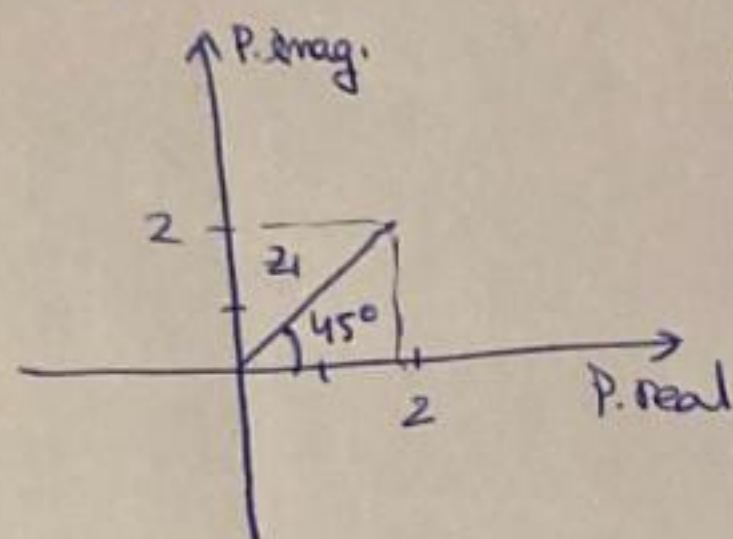


Opuesto de z_3 : $-z_3 = -1 + 2i$

Conjugado de z_3 : $\overline{z_3} = 1 + 2i$



c) $z_1 = 2 + 2i$ forma binómica $\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow$ Forma polar: $\begin{cases} r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \tan \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \arctan 1 = 45^\circ \end{cases}$

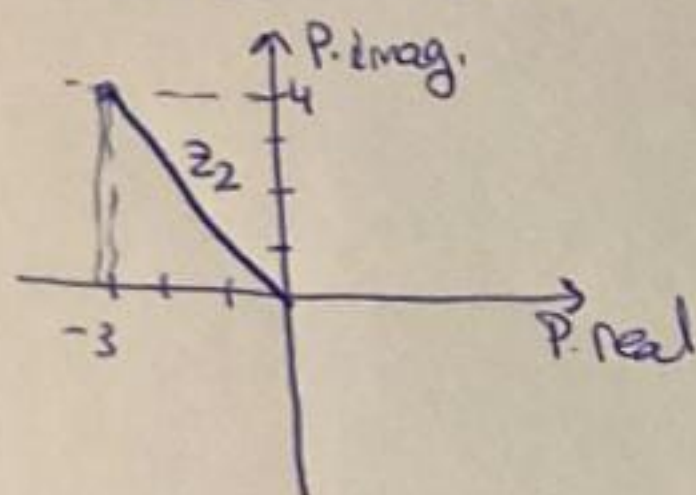


Está en el I cuadrante, entonces 45° es el ángulo.

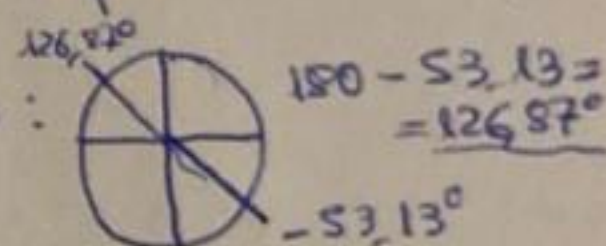
Forma polar: $z_1 = r_\alpha = \boxed{2\sqrt{2} 45^\circ}$

Forma trigonométrica: $z_1 = 2\sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$

$z_2 = -3 + 4i \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\ \tan \alpha = \frac{4}{-3} \Rightarrow \alpha = \arctan(-\frac{4}{3}) = -53,13^\circ \Rightarrow 306,87^\circ \end{cases}$



$\Rightarrow 306,87^\circ$ está en el IV cuadrante pero el n.º complejo está en el II cuadrante, luego:

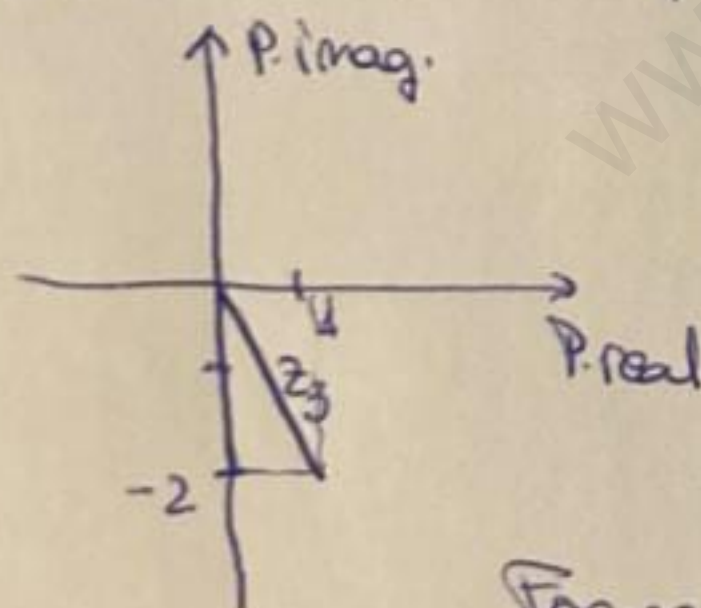


El ángulo es $126,87^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Forma polar: $z_2 = \boxed{5 126,87^\circ}$

Forma trigonométrica: $z_2 = 5 (\cos 126,87^\circ + i \sin 126,87^\circ)$

$z_3 = 1 - 2i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ \tan \alpha = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow \alpha = \arctan(-2) = -63,435^\circ (296,56^\circ) \end{cases}$



$\Rightarrow$ IV cuadrante, luego el ángulo es $296,56^\circ$:

Forma polar: $z_3 = \boxed{\sqrt{5} 296,56^\circ}$

Forma trigonométrica: $z_3 = \sqrt{5} (\cos 296,56^\circ + i \sin 296,56^\circ)$

④ a) $x^2 + 2x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$

b) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1} = \pm i$

c) $x^2 - 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}$