- **Tema 1: Límites y continuidad**
- **Tema 2: La derivada y sus aplicaciones**
- **Tema 3: La integral y sus aplicaciones**

EXAMEN

1. La función del nivel de rendimiento físico (en porcentaje) de un participante en una carrera de montaña, que tiene una duración de 5 horas, es:

$$R(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 13$$

siendo x el tiempo de la carrera en horas. Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿Con qué nivel de rendimiento empieza?

b) ¿Con qué nivel de rendimiento acaba la carrera?

c) Indica en qué momentos crece y decrece el rendimiento del participante de forma razonada.

d) ¿Cuándo alcanza el máximo rendimiento?, ¿Y el mínimo? Justifica tu respuesta.

2. Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar y pasar a papel 15,5 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo, de forma que el nº de fotografías por minuto será función de la antigüedad de la máquina de acuerdo a la siguiente expresión. (N(t) representa el nº de fotografías por minuto cuando la máquina tiene t años).

$$N(t) = \begin{cases} 15{,}5 - 1{,}1 \cdot t & si \quad 0 \leq t \leq 5 \\ \dfrac{5t + 45}{t + 2} & si \quad t > 5 \end{cases}$$

a) ¿Es continua la función al llegar el quinto año?

b) ¿Es derivable?

c) Estudia el crecimiento y decrecimiento del número de fotografías.

d) ¿Cuándo se alcanza el máximo de fotografías reveladas por minuto?

e) Justifica que la máquina no revelará menos de 5 fotografías por minuto por muy vieja que sea.

3. Se quiere cubrir con un espejo el espacio generado al construir un arco moderno de Gaudí, que coincide con el área encerrada entre las funciones siguientes (con las unidades expresadas en metros).

- $y = -x^2 + 14x - 41$
- $y = 4$

a) Hacer una gráfica de las funciones.

b) Obtén el punto donde se cortan las dos funciones.

c) Calcula la superficie que hay que cubrir.

d) El coste del espejo espejo es de 16,26€ el metro cuadrado. A esta cantidad hay que añadir la mano de obra, que es un 24 % de lo que cuesta el espejo, más el gasto del transporte que es de 85€. ¿A cuánto asciende el total?

RESOLUCIÓN

1. La función del nivel de rendimiento físico (en porcentaje) de un participante en una carrera de montaña, que tiene una duración de 5 horas, es:

$$R(x) = x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 13$$

siendo x el tiempo de la carrera en horas. Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿Con qué nivel de rendimiento empieza?

b) ¿Con qué nivel de rendimiento acaba la carrera?

c) Indica en qué momentos crece y decrece el rendimiento del participante de forma razonada.

d) ¿Cuándo alcanza el máximo rendimiento?, ¿Y el mínimo? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) $R(x = 0) = 0^3 - 7{,}5 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 + 13 = 13$, es decir, comienza con un 13 % de su rendimiento.

b) Acaba la carrera en la 5ª hora: $R(x = 5) = 5^3 - 7{,}5 \cdot 5^2 + 12 \cdot 5 + 13 = 10{,}5$, es decir, termina la carrera a un 10,5 % de su rendimiento.

c) Para analizar la monotonía (cuándo crece y decrece la función), se debe estudiar la derivada:

- Calculamos la primera derivada: $R´(x) = 3x^2 - 15x + 12$
- Igualamos la primera derivada a cero: $3x^2 - 15x + 12 = 0$ y resolviendo obtenemos $x = 1$, $x = 4$

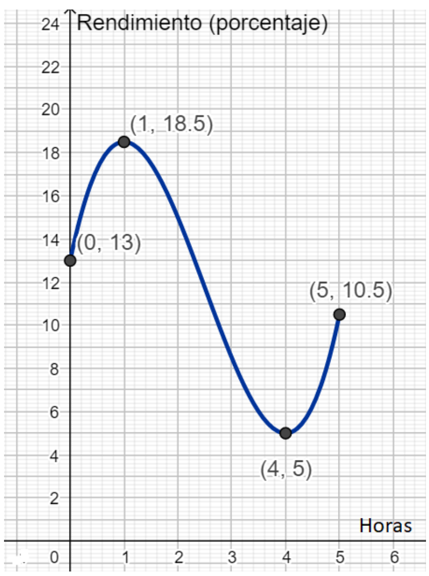
Resumimos la información para poder analizar la derivada:

	$(0,1)$	$x = 1$	$(1,4)$	$x = 4$	$(4,5)$
Signo de la primera derivada	$R´(0{,}5 > 0$		$R´(3) = -6 < 0$		$R´(4{,}5) > 0$
$R(x)$ **es ...**	$\nearrow$ **Creciente** $R(0) = 13\,\%$	**Máximo** $R(1) = 18{,}5\,\%$	$\searrow$ **Decreciente**	**Mínimo** $R(4) = 5\,\%$	$\nearrow$ **Creciente** $R(5) = 10{,}5\,\%$

d) Mirando en la tabla:

- El máximo rendimiento es en la 1ª hora: $R(1) = 18{,}5\,\%$
- El mínimo rendimiento en en la 4ª hora: $R(1) = 5\,\%$

La gráfica final quedaría de la siguiente forma:



2. Cierta empresa de material fotográfico oferta una máquina que es capaz de revelar y pasar a papel 15,5 fotografías por minuto. Sin embargo, sus cualidades se van deteriorando con el tiempo, de forma que el nº de fotografías por minuto será función de la antigüedad de la máquina de acuerdo a la siguiente expresión. (N(t) representa el nº de fotografías por minuto cuando la máquina tiene t años).

$$N(t) = \begin{cases} 15{,}5 - 1{,}1 \cdot t & si \quad 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{5t+45}{t+2} & si \quad t > 5 \end{cases}$$

a) ¿Es continua la función al llegar el quinto año?

b) ¿Es derivable?

c) Estudia el crecimiento y decrecimiento del número de fotografías.

d) ¿Cuándo se alcanza el máximo de fotografías reveladas por minuto?

e) Justifica que la máquina no revelará menos de 5 fotografías por minuto por muy vieja que sea.

Solución:

a) Para demostrar si la función es continua, calculamos los límites laterales en $t = 5$

- $\lim\limits_{x \to 5^-} (15{,}5 - 1{,}1 \cdot t) = 15{,}5 - 1{,}1 \cdot 5 = 10$
- $\lim\limits_{x \to 5^+} \left(\dfrac{5t+45}{t+2}\right) = \dfrac{5 \cdot 5 + 45}{5+2} = \dfrac{70}{7} = 10$
- $N(5) = 15{,}5 - 1{,}1 \cdot 5 = 10$

Como los dos límites laterales son iguales e iguales a $N(5)$, la función $N(t)$ es continua en $t = 5$.

b) Para analizar si es derivable o no y cuándo crece y decrece, realizamos la derivada y analizamos su signo:

$$N(t) = \begin{cases} 15{,}5 - 1{,}1 \cdot t & si \quad 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{5t+45}{t+2} & si \quad t > 5 \end{cases} \Longrightarrow N'(t) = \begin{cases} -1{,}1 & si\ 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{-35}{(t+2)^2} & si\ t > 5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} N'(5^-) = -1{,}1 \\ N'(5^+) = \dfrac{-35}{(5+2)^2} = -2{,}5 \end{cases}$$

Como las dos derivadas laterales no son iguales, $N(t)$ no es derivable en $t = 5$

c) Resumimos la información para poder analizar el crecimiento y decrecimiento así como el máximo:

	$(0,5)$	$t = 5$	$(5, \infty)$
Signo de la primera derivada	$N'(1) < 0$		$N'(10) < 0$
$N(t)$ **es ...**	$\searrow$ **Decreciente entre 0 y 2 años** $N(0) = 15{,}5$	... $N(5) = 10$	$\searrow$ **Decreciente a partir del 5º año** $\lim\limits_{t \to \infty} N(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{5 \cdot t + 45}{t+2} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{5 \cdot t}{t} = 5$

d) El máximo de fotografías se revela al principio con 15.5 fotografías por minuto.

e) La justificación se realiza calculando el límite en el infinito, es decir, cuando pasan muchos años:

$\lim\limits_{t \to \infty} N(t) = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{5 \cdot t + 45}{t+2} = \left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\} = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{5 \cdot t}{t} = 5$, es decir, por muchos años que pasen (por muy vieja que sea la máquina), revelará al menos 5 fotografías por minuto.

3. Se quiere cubrir con un espejo el espacio generado al construir un arco moderno de Gaudí, que coincide con el área encerrada entre las funciones siguientes (con las unidades expresadas en metros).

- $y = -x^2 + 14x - 41$
- $y = 4$

a) Hacer una gráfica de las funciones.

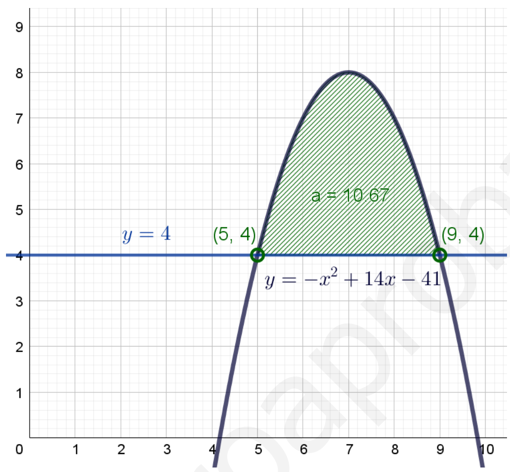
b) Obtén el punto donde se cortan las dos funciones.

c) Calcula la superficie que hay que cubrir.

d) El coste del espejo espejo es de 16,26€ el metro cuadrado. A esta cantidad hay que añadir la mano de obra, que es un 24 % de lo que cuesta el espejo, más el gasto del transporte que es de 85€. ¿A cuánto asciende el total?

Solución:

a) Si realizamos los cálculos y representamos las dos funciones obtenemos la siguiente gráfica:



b) Igualando las dos expresiones, obtenemos el punto de corte:
$-x^2 + 14x - 41 = 4 \longrightarrow -x^2 + 14x - 45 = 0$ y resolviendo obtenemos: $x_1 = 5$, $x_2 = 9$

c) Calculamos la integral entre esos dos puntos:

$$\int_5^9 \left(-x^2 + 14x - 41\right) - (4)\, dx = \int_5^9 \left(-x^2 + 14x - 45\right) dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{14x^2}{2} - 45x\right]_{x=5}^{x=9} = 10{,}67m^2$$

d) Para calcular el coste final realizamos los correspondientes cálculos:

- El coste del espejo espejo es de 16,26€ el metro cuadrado. $10{,}67 \cdot 16{,}26 = 173{,}49$€
- Le añadimos la mano de obra (24 %): 24 % *de* $173{,}49 = 41{,}64$€
- Le añadimos el gasto del transporte que es de 85€.
- El total sería: $173{,}49 + 41{,}64 + 85 = 300{,}13$€