1. **[1 punto]** Sabiendo que ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y que $\operatorname{tg}\alpha = -2$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\cos\alpha$.

2. **[1 punto]** Un avión vuela en línea horizontal hacia el este. Desde un punto situado en el suelo, al sur del avión, se ve a este bajo un ángulo de 45°. Cuando el avión ha volado 1000 metros, desde ese mismo punto se le ve con un ángulo de 30°. ¿Cuál es la altura de vuelo?

3. **[1 punto]** Demuestra que es cierta la siguiente identidad: $\cos(x+y)\cos(x-y)+1=\cos^2 x+\cos^2 y$.

4. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente: $\dfrac{1}{\cos^2 x\left(1-\operatorname{tg}^2 x\right)}$.

5. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $\left[0^{\circ}, 360^{\circ}\right)$ (las del sistema darlas solamente en el primer cuadrante).

$$\text{a) } \cos 2x = 5-6\cos^2 x \quad ; \quad \text{b) } \begin{cases} \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

6. **[1 punto]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

$$\text{a) } (1+2i)^2(1-i) \quad ; \quad \text{b) } \frac{2-3i}{1-i}$$

7. **[1,5 puntos]** Halla las cuatro raíces: $\sqrt[4]{2+\dfrac{3}{2}i}$

8. **[1,5 puntos; 0,5 puntos por apartado]** Contesta a las siguientes cuestiones:
   a) Hallar el ángulo formado por los vectores $\vec{u}=\left(5,\sqrt{3}\right)$ y $\vec{v}=\left(-\sqrt{3},1\right)$.
   b) Dado el vector $\vec{u}=(1,2)$, hallar otro vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u}\perp\vec{v}$ y $|\vec{v}|=3$.
   c) Calcula el módulo del vector $\vec{u}+\vec{v}$ sabiendo que $\vec{u}\perp\vec{v}$, $|\vec{u}|=12$ y que $|\vec{v}|=15$.

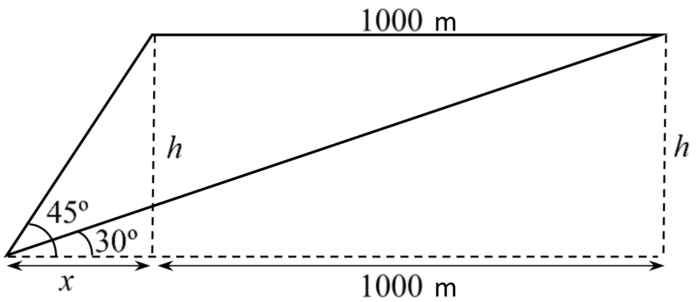
Soluciones

1. **[1 punto]** Sabiendo que ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y que $\operatorname{tg}\alpha=-2$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\cos\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha=-2\Rightarrow\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}=-2\Rightarrow\operatorname{sen}\alpha=-2\cos^2\alpha$. Como $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, entonces, sustituyendo:

$$(-2\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1\Rightarrow 4\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow 5\cos^2\alpha=1\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

2. **[1 punto]** Un avión vuela en línea horizontal hacia el este. Desde un punto situado en el suelo, al sur del avión, se ve a este bajo un ángulo de 45^o. Cuando el avión ha volado 1000 metros, desde ese mismo punto se le ve con un ángulo de 30^o. ¿Cuál es la altura de vuelo?



Observando la figura en la que se representa la situación planteada en el enunciado, y tomando los triángulos rectángulos adecuados, se tiene:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}45^\text{o}=\dfrac{h}{x}\\[2ex]\operatorname{tg}30^\text{o}=\dfrac{h}{1000+x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=x\cdot\operatorname{tg}45^\text{o}\\ h=(1000+x)\operatorname{tg}30^\text{o}\end{cases}$$

$\Rightarrow x\cdot 1=(1000+x)\cdot 0,58\Rightarrow x=580+0,58x\Rightarrow 0,42x=580\Rightarrow x=1380,95$ m. Por tanto:

$h=x\cdot\operatorname{tg}45^\text{o}=x\cdot 1\Rightarrow h=1380,95$ m.

3. **[1 punto]** Demuestra que es cierta la siguiente identidad: $\cos(x+y)\cos(x-y)+1=\cos^2x+\cos^2y$.

$$\cos(x+y)\cos(x-y)+1=(\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y)(\cos x\cos y+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y)+1=$$
$$=(\cos x\cos y)^2-(1-\cos^2x)(1-\cos^2y)+1=\cos^2x\cos^2y-(1-\cos^2y-\cos^2x+\cos^2x\cos^2y)+1=$$
$$=\cos^2x\cos^2y-1+\cos^2y+\cos^2x-\cos^2x\cos^2y+1=\cos^2x+\cos^2y$$

4. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente:

$$\frac{1}{\cos^2x(1-\operatorname{tg}^2x)}=\frac{1}{\cos^2x\left(1-\dfrac{\operatorname{sen}^2x}{\cos^2x}\right)}=\frac{1}{\cos^2x-\operatorname{sen}^2x}=\frac{1}{\cos 2x}=\sec 2x$$

5. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $[0^\text{o},360^\text{o})$ (las del sistema darlas solamente en el primer cuadrante).

a) $\cos 2x=5-6\cos^2x\Rightarrow\cos^2x-\operatorname{sen}^2x=5-6\cos^2x\Rightarrow\cos^2x-(1-\cos^2x)=5-6\cos^2x\Rightarrow$

$$\Rightarrow\cos^2x-1+\cos^2x=5-6\cos^2x\Rightarrow 8\cos^2x=6\Rightarrow\cos^2x=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=30^\text{o};\,x=330^\text{o}\\[2ex]\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=150^\text{o};\,x=210^\text{o}\end{cases}$$

b) $\begin{cases} \text{sen } x+\text{sen } y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \text{sen } x-\text{sen } y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$. Sumando ambas ecuaciones se tiene: $2\text{sen } x=\sqrt{3}\Rightarrow \text{sen } x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=60^{\circ}$.

De manera similar, restando ambas ecuaciones tenemos: $2\text{sen } y=1\Rightarrow \text{sen } y=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=30^{\circ}$.

6. **[1 punto]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

a) $(1+2i)^2(1-i)=(1+4i+4i^2)(1-i)=(1+4i-4)(1-i)=(-3+4i)(1-i)=-3+3i+4i-4i^2=$
$=-3+3i+4i+4=1+7i$.

b) $\dfrac{2-3i}{1-i}=\dfrac{(2-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2+2i-3i-3i^2}{1-i^2}=\dfrac{2+2i-3i+3}{1+1}=\dfrac{5-i}{2}=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}i$

7. **[1,5 puntos]** Halla las cuatro raíces: $\sqrt[4]{2+\dfrac{3}{2}i}$

$$\sqrt[4]{2+\frac{3}{2}i}=\left[\begin{array}{l} r=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2} \\ \theta=\text{arctg}\,\frac{3/2}{2}=\text{arctg}\,\frac{3}{4}=36,87^{\circ} \end{array}\right]=\left(\frac{5}{2}\right)_{36,87^{\circ}}$$

. Entonces $\sqrt[4]{2+\dfrac{3}{2}i}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{5}{2}\right)_{36,^{\circ}87}}=\sqrt[4]{\dfrac{5}{2}}_{\alpha}$.

Los valores de α se obtienen mediante la fórmula $\alpha=\dfrac{36,87^{\circ}+360^{\circ}k}{4}$, donde k se mueve entre 0 y 3. Por tanto, las cuatro raíces que se piden son: $r_1=\sqrt[4]{\dfrac{5}{2}}_{9,22^{\circ}}$, $r_2=\sqrt[4]{\dfrac{5}{2}}_{99,22^{\circ}}$, $r_3=\sqrt[4]{\dfrac{5}{2}}_{189,22^{\circ}}$, $r_4=\sqrt[4]{\dfrac{5}{2}}_{279,22^{\circ}}$.

8. **[1,5 puntos; 0,5 puntos por apartado]** Contesta a las siguientes cuestiones:

a) Hallar el ángulo formado por los vectores $\vec{u}=(5,\sqrt{3})$ y $\vec{v}=(-\sqrt{3},1)$.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{25+3}\cdot\sqrt{3+1}}=\frac{6\sqrt{3}}{2\sqrt{28}}\cong 0,98\Rightarrow\alpha=11,48^{\circ}.$$

b) Dado el vector $\vec{u}=(1,2)$, hallar otro vector $\vec{v}$ tal que $\vec{u}\perp\vec{v}$ y $|\vec{v}|=3$.

Llamemos $\vec{v}=(x,y)$. Entonces: $\begin{cases} \vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow x+2y=0 \\ |\vec{v}|=3\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=3\Rightarrow x^2+y^2=9 \end{cases}$. De la primera ecuación $x=-2y$.

Sustituyendo en la segunda: $4y^2+y^2=9\Rightarrow 5y^2=9\Rightarrow y^2=\dfrac{9}{5}\Rightarrow y=\pm\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Por tanto: $x=\mp\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.

De este modo, tenemos dos soluciones: $\vec{v}=\left(\dfrac{-6\sqrt{5}}{5},\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$; $\vec{v}=\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5},\dfrac{-3\sqrt{5}}{5}\right)$.

c) Calcula el módulo del vector $\vec{u}+\vec{v}$ sabiendo que $\vec{u}\perp\vec{v}$, $|\vec{u}|=12$ y que $|\vec{v}|=15$.

Como $\vec{u}\perp\vec{v}$, se tiene que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}=0$. Entonces:

$|\vec{u}+\vec{v}|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2=12^2+15^2=369$.

Por tanto: $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{369}\cong 19,21$.