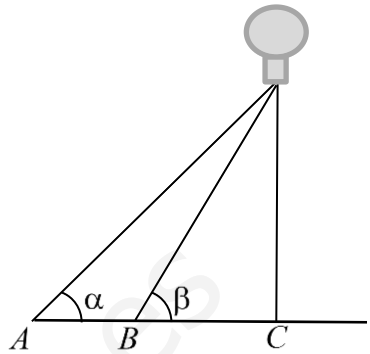
1. **[1 punto]** Sabiendo que ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante y que $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, halla el <u>valor exacto, racionalizado y simplificado</u> de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\operatorname{tg}\alpha$.

2. **[1,5 puntos]** Para hallar la altura a la que está situado un globo, Rosa se coloca en un punto B y Carlos en un punto A, a 5 metros de ella, de tal forma que los puntos A, B y C están alineados (ver figura). Si los ángulos α y β miden 45° y 50° respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo?



3. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente:

$$\frac{\left(\operatorname{tg}^2\alpha - 1\right)\cdot\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 1}$$

4. **[1 punto]** Resolver la ecuación trigonométrica $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$. Dar las soluciones en el intervalo $\left[0^\circ, 360^\circ\right)$.

5. **[2 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$; b) $\dfrac{3+5i}{1-i}$; c) $\left(1+\dfrac{1}{i}\right)^2 + \left(i-\dfrac{1}{i}\right)^2$

6. **[1,5 puntos]** Halla las raíces cúbicas del número complejo $4-4\sqrt{3}\,i$, es decir, hallar $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i}$

7. Contesta a las siguientes cuestiones sobre vectores:

   a) **[0,5 puntos]** Calcular el valor de m para que el vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, m\right)$ sea unitario, es decir, para que su módulo sea igual a uno.

   b) **[0,5 puntos]** Calcula el punto simétrico del punto $A(3,2)$ respecto del punto $M(4,3)$.

   c) **[1 punto]** Hallar el vector $\vec{u} = (a,b)$ cuyo producto escalar por sí mismo es 20 y cuyo producto escalar por el vector $\vec{v} = (3,2)$ es igual a 2.

Soluciones

1. **[1 punto]** Sabiendo que ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante y que $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen}\alpha$ y de $\operatorname{tg}\alpha$.

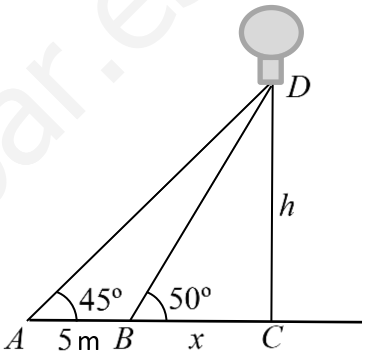
   Puesto que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, tenemos:

   $$\operatorname{sen}^2\alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\frac{4}{5}$$

   (tomamos la raíz negativa porque α se encuentra en el tercer cuadrante).

   Por último: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-4/5}{-3/5} = \frac{4}{3}$.

2. **[1,5 puntos]** Para hallar la altura a la que está situado un globo, Rosa se coloca en un punto B y Carlos en un punto A, a 5 metros de ella, de tal forma que los puntos A, B y C están alineados (ver figura). Si los ángulos α y β miden 45° y 50° respectivamente, ¿a qué altura se encuentra el globo?

   Llamemos h a la altura del globo y x a la distancia de B a C. Llamemos también D al punto donde se encuentra la base del globo. Entonces, los triángulos ADC y BDC son claramente rectángulos. Por tanto:

   $\operatorname{tg}45 = \frac{h}{5+x} \Rightarrow 1 = \frac{h}{5+x} \Rightarrow h = 5+x$ y $\operatorname{tg}50^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow 1{,}19 = \frac{h}{x} \Rightarrow h = 1{,}19x$. Igualando ambas expresiones:

   $5 + x = 1{,}19x \Rightarrow x - 1{,}19x = -5 \Rightarrow -0{,}19x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{-0{,}19} \Rightarrow x = 26{,}316$ m. Sustituyendo, por ejemplo, en $h = 5 + x$, tenemos $h = 5 + 26{,}316 = 31{,}316$. O sea, la altura del glob es de, aproximadamente, $31{,}316$ metros.

3. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente:

   $$\frac{(\operatorname{tg}^2\alpha - 1)\cdot\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 1} = \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 1\right)\cdot\cos\alpha}{\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - 1} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha}{\frac{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{(\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)\cos\alpha}{(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)\cos\alpha} =$$

   $$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha} = \frac{(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)\cdot(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha} = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha.$$

4. **[1 punto]** Resolver la ecuación trigonométrica $2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1$. Dar las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.

   $$2\cos^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow 2 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow -2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1 = 0.$$

   Entonces: $\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-4} = \frac{-1 \pm 3}{-4} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{sen} x = \frac{-4}{-4} = 1 \end{cases}$.

   Si $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$, entonces $x = 210^\circ$ o $x = 330^\circ$. Sin $\operatorname{sen} x = 1$, entonces $x = 90^\circ$.

5. **[2 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)^3 = \left[\begin{array}{l} r=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=\sqrt{4}=2 \\ \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ \end{array}\right] = \left(2_{30^\circ}\right)^3 = 2^3{}_{3\cdot 30^\circ} = 8_{90^\circ} = 8\left(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ\right) = 8i$.

b) $\dfrac{3+5i}{1-i} = \dfrac{(3+5i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \dfrac{3+3i+5i+5i^2}{1^2-i^2} = \dfrac{3+8i-5}{1-(-1)} = \dfrac{-2+8i}{2} = -1+4i$.

c) $\left(1+\dfrac{1}{i}\right)^2 + \left(i-\dfrac{1}{i}\right)^2 = \left(1+\dfrac{-i}{i\cdot(-i)}\right)^2 + \left(i-\dfrac{-i}{i\cdot(-i)}\right)^2 = \left(1+\dfrac{-i}{-i^2}\right)^2 + \left(i-\dfrac{-i}{-i^2}\right)^2 = \left(1-\dfrac{i}{1}\right)^2 + \left(i-\dfrac{-i}{1}\right)^2 =$

$= (1-i)^2 + (2i)^2 = 1-2i+i^2+4i^2 = 1-2i-1+4\cdot(-1) = 1-2i-1-4 = -4-2i$.

6. **[1,5 puntos]** Halla las raíces cúbicas del número complejo $4-4\sqrt{3}\,i$, es decir, hallar $\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i}$

$\sqrt[3]{4-4\sqrt{3}\,i} = \left[\begin{array}{l} r=\sqrt{4^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16+48}=\sqrt{64}=8 \\ \alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{-4\sqrt{3}}{4} = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -60^\circ = 300^\circ \end{array}\right] = \sqrt[3]{8_{300^\circ}} = \sqrt[3]{8}_{\beta} = 2_\beta$ (el argumento es 300° porque el número complejo $4-4\sqrt{3}i$ se encuentra en el cuarto cuadrante).

Los valores de β se obtienen mediante la fórmula $\beta = \dfrac{300^\circ + 360^\circ k}{3}$, donde k se mueve entre 0 y 2. Por tanto, las tres raíces que se piden son: $r_1 = 2_{100^\circ}$, $r_2 = 2_{220^\circ}$, $r_3 = 2_{340^\circ}$.

7. Contesta a las siguientes cuestiones sobre vectores:

a) **[0,5 puntos]** Calcular el valor de m para que el vector $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{2}, m\right)$ sea unitario, es decir, para que su módulo sea igual a uno. $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + m^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{4} + m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow m = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) **[0,5 puntos]** Calcula el punto simétrico del punto $A(3,2)$ respecto del punto $M(4,3)$.

Llamemos $B(x,y)$ al punto simétrico del punto $A(3,2)$ respecto del punto $M(4,3)$. Entonces M será el punto medio de A y B. Es decir: $(4,3) = \left(\dfrac{3+x}{2}, \dfrac{2+y}{2}\right)$. De aquí: $\begin{cases} 8 = 3+x \Rightarrow x = 5 \\ 6 = 2+y \Rightarrow y = 4 \end{cases}$. Por tanto, el punto simétrico del punto $A(3,2)$ respecto del punto $M(4,3)$ es $B(5,4)$.

c) **[1 punto]** Hallar el vector $\vec{u} = (a,b)$ cuyo producto escalar por sí mismo es 20 y cuyo producto escalar por el vector $\vec{v} = (3,2)$ es igual a 2.

$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{u} = (a,b)\cdot(a,b) = a^2+b^2 = 20 \\ \vec{u}\cdot\vec{v} = (a,b)\cdot(3,2) = 3a+2b = 2 \end{cases}$. De la segunda ecuación: $a = \dfrac{2-2b}{3}$. Sustituyendo en la primera:

$\left(\dfrac{2-2b}{3}\right)^2 + b^2 = 20 \Rightarrow \dfrac{4-8b+4b^2}{9} + b^2 = 20 \Rightarrow 4-8b+4b^2+9b^2 = 180 \Rightarrow 13b^2-8b-176 = 0$.

Las soluciones de la ecuación anterior son $b_1 = 4$ y $b_2 = -\dfrac{44}{13}$. Sustituyendo, se tiene $a_1 = -2$, $a_2 = \dfrac{38}{13}$.