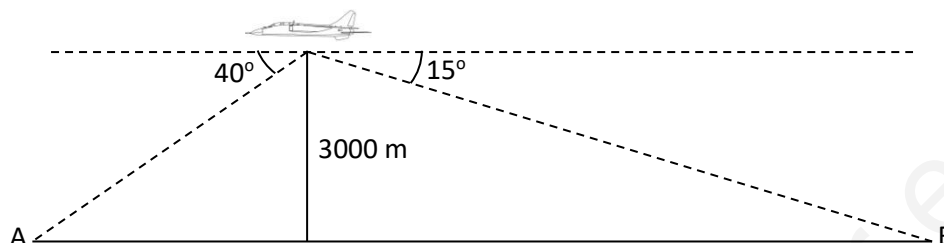


1. **[1 punto]** Sabiendo que ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y que $\operatorname{tg} \alpha = -2$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} \alpha$ y de $\cos \alpha$.
2. **[1,5 puntos]** Un avión que vuela a 3000 metros de altura, en un instante determinado, ve un pueblo A bajo un ángulo de 40° con respecto a la horizontal de vuelo (ángulo de depresión) y otro pueblo B bajo un ángulo de 15° . ¿Qué distancia hay entre A y B? (ver figura).



3. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente: $\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x}$.
4. **[1 punto]** Resolver la ecuación trigonométrica $\cos 2x = 5 - 6 \cos^2 x$. Dar las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$.
5. **[2 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

a) $\frac{i+1}{-i}$; b) $(1+2i)^2(1-i)$; c) $\frac{2-3i}{1-i}$; d) $(-1+i)^6$

6. **[1,5 puntos]** Halla las raíces cuartas del número complejo $3 + \sqrt{3}i$.
7. Contesta a las siguientes cuestiones sobre vectores:
 - a) **[0,5 puntos]** Hallar las coordenadas del vector $\vec{x} = (7, -7)$ respecto de la base formada por los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 3)$.
 - b) **[0,5 puntos]** Calcula el punto simétrico del punto $A(-3, 1)$ respecto del punto $M(-1, 0)$.
 - c) **[1 punto]** Dados los vectores $\vec{u}(k, -6)$ y $\vec{v}(3, h)$, calcula k y h de modo que $|\vec{u}| = 10$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Soluciones

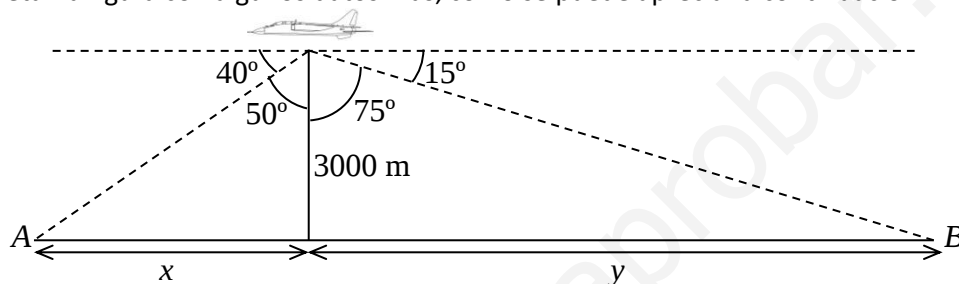
1. **[1 punto]** Sabiendo que ángulo α se encuentra en el segundo cuadrante y que $\operatorname{tg} \alpha = -2$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} \alpha$ y de $\cos \alpha$.

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow (-2)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \quad (\alpha \text{ se está en el segundo cuadrante}).$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = (-2) \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

2. **[1,5 puntos]** Un avión que vuela a 3000 metros de altura, en un instante determinado, ve un pueblo A bajo un ángulo de 40° con respecto a la horizontal de vuelo (ángulo de depresión) y otro pueblo B bajo un ángulo de 15° . ¿Qué distancia hay entre A y B? (ver figura).

Vamos a completar la figura con algunos datos más, como se puede apreciar a continuación.



Entonces:

$$\operatorname{tg} 50^\circ = \frac{x}{3000} \Rightarrow x = 3000 \cdot \operatorname{tg} 50^\circ \Rightarrow x \cong 3575,26 \text{ m.} \quad \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{y}{3000} \Rightarrow y = 3000 \cdot \operatorname{tg} 75^\circ \Rightarrow y \cong 11196,15 \text{ m.}$$

Por tanto, la distancia entre A y B es $x + y = 3575,26 + 11196,15 = 14771,41$ metros.

3. **[1 punto]** Simplifica de manera razonada, paso a paso, la expresión siguiente: $\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x}$.

$$\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x} = \frac{1 - (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 2\operatorname{tg}^2 x.$$

4. **[1 punto]** Resolver la ecuación trigonométrica $\cos 2x = 5 - 6\cos^2 x$. Dar las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$

$$\cos 2x = 5 - 6\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 5 - 6\cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 5 - 6\cos^2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cos^2 x = 6 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 30^\circ ; x = 330^\circ \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 150^\circ ; x = 210^\circ \end{cases}$$

5. **[2 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

a) $\frac{i+1}{-i} = \frac{(i+1)i}{-i \cdot i} = \frac{i^2 + i}{-i^2} = \frac{-1+i}{-(-1)} = \frac{-1+i}{1} = -1+i$

b) $(1+2i)^2(1-i) = (1+4i+4i^2)(1-i) = (1+4i-4)(1-i) = (-3+4i)(1-i) = -3+3i+4i-4i^2 = -3+3i+4i+4 = 1+7i.$

c) $\frac{2-3i}{1-i} = \frac{(2-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i-3i-3i^2}{1-i^2} = \frac{2+2i-3i+3}{1+1} = \frac{5-i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$

$$\begin{aligned} \text{d) } (-1+i)^6 &= \left[\begin{array}{l} r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = \arctg \frac{1}{-1} = \arctg(-1) = 135^\circ \end{array} \right] = \left(\sqrt{2}_{135^\circ} \right)^6 = \sqrt{2}^6_{6 \cdot 135^\circ} = 2^3_{810^\circ} = 8_{90^\circ} = \\ &= 8(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 8(0 + i \cdot 1) = 8i. \end{aligned}$$

6. **[1,5 puntos]** Halla las raíces cuartas del número complejo $3 + \sqrt{3}i$.

$$\sqrt[4]{3 + \sqrt{3}i} = \left[\begin{array}{l} r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} \\ \alpha = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = 30^\circ \end{array} \right] = \sqrt[4]{\sqrt{12}_{30^\circ}}. \text{ Entonces: } \sqrt[4]{3 + \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{\sqrt{12}_{30^\circ}} = \sqrt[8]{12}_\beta.$$

Los valores de β se obtienen mediante la fórmula $\beta = \frac{30^\circ + 360^\circ k}{4}$, donde k se mueve entre 0 y 3. Por tanto,

las cuatro raíces que se piden son: $r_1 = \sqrt[8]{12}_{7,5^\circ}$, $r_2 = \sqrt[8]{12}_{97,5^\circ}$, $r_3 = \sqrt[8]{12}_{187,5^\circ}$, $r_4 = \sqrt[8]{12}_{277,5^\circ}$.

7. Contesta a las siguientes cuestiones sobre vectores:

a) **[0,5 puntos]** Hallar las coordenadas del vector $\vec{x} = (7, -7)$ respecto de la base formada por los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 3)$.

Hemos de hallar dos números a y b tales que $\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Es decir:

$$(7, -7) = a(2, 1) + b(-1, 3) \Rightarrow (7, -7) = (2a - b, a + 3b) \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = 7 \\ a + 3b = -7 \end{cases}.$$

Despejando a de la segunda ecuación se tiene que $a = -7 - 3b$. Sustituyendo en la primera:

$$2(-7 - 3b) - b = 7 \Rightarrow -14 - 6b - b = 7 \Rightarrow -7b = 21 \Rightarrow b = -3. \text{ Ahora obtenemos el valor de } a:$$

$a = -7 - 3 \cdot (-3) \Rightarrow a = -7 + 9 \Rightarrow a = 2$. Por tanto, las coordenadas del vector $\vec{x} = (7, -7)$ respecto de la base formada por los vectores $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 3)$ son $(a, b) = (2, -3)$.

b) **[0,5 puntos]** Calcula el punto simétrico del punto $A(-3, 1)$ respecto del punto $M(-1, 0)$.

Llamemos $B(x, y)$ al punto simétrico del punto $A(-3, 1)$ respecto del punto $M(-1, 0)$. Entonces M será el

punto medio de A y B . Es decir: $(-1, 0) = \left(\frac{x-3}{2}, \frac{y+1}{2} \right)$. De aquí:
$$\begin{cases} -1 = \frac{x-3}{2} \Rightarrow -2 = x-3 \Rightarrow x=1 \\ 0 = \frac{y+1}{2} \Rightarrow 0 = y+1 \Rightarrow y=-1 \end{cases}.$$
 Por

tanto, el punto simétrico del punto $A(-3, 1)$ respecto del punto $M(-1, 0)$ es $B(1, -1)$.

c) **[1 punto]** Dados los vectores $\vec{u}(k, -6)$ y $\vec{v}(3, h)$, calcula k y h de modo que $|\vec{u}| = 10$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Puesto que $|\vec{u}| = 10$, entonces $\sqrt{k^2 + (-6)^2} = 10 \Rightarrow \sqrt{k^2 + 36} = 10 \Rightarrow k^2 + 36 = 100 \Rightarrow k^2 = 64 \Rightarrow k = \pm 8$.

Como $\vec{u} \perp \vec{v}$, se tiene que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 3k - 6h = 0$. Entonces:

- Si $k = 8$, $3 \cdot 8 - 6h = 0 \Rightarrow 24 - 6h = 0 \Rightarrow -6h = -24 \Rightarrow h = 4$.
- Si $k = -8$, $3 \cdot (-8) - 6h = 0 \Rightarrow -24 - 6h = 0 \Rightarrow -6h = 24 \Rightarrow h = -4$.