

1. **[1 punto]** El ángulo α es desconocido, pero se sabe que se encuentra en el cuarto cuadrante y que $\frac{1}{\cos \alpha} = 3$,
halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\sin \alpha$ y de $\operatorname{tg} \alpha$.
2. **[2 puntos]** Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que
distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° . Calcula la
medida del otro cable y la altura a la que se encuentra el globo. Realiza un dibujo de la situación.
3. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica dando las soluciones en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$:
$$\operatorname{tg} x + 2\sin x = 0$$
4. **[3 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:
a) $(3-i)(-2+4i)-(6-2i)$; b) $\frac{1-2i}{3-i}$; c) $\left(\frac{2}{1-i}\right)^4$
5. **[2 puntos]** Halla las cuatro raíces cuartas del número complejo $z = 4-3i$, es decir, hallar $\sqrt[4]{z}$.

Soluciones

1. **[1 punto]** El ángulo α es desconocido, pero se sabe que se encuentra en el cuarto cuadrante y que $\frac{1}{\cos \alpha} = 3$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\sin \alpha$ y de $\operatorname{tg} \alpha$.

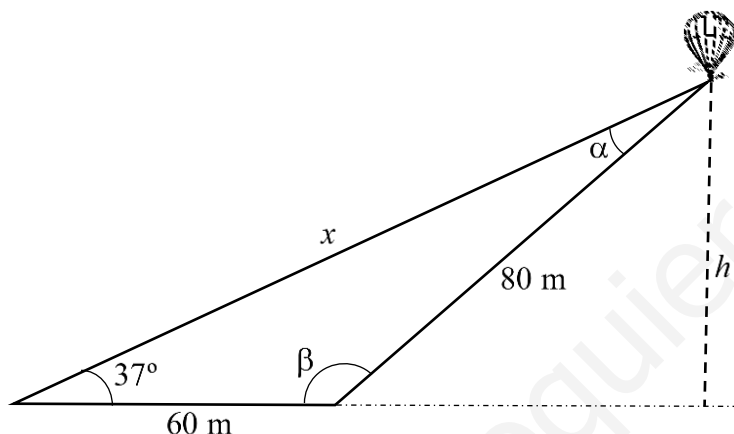
$$\frac{1}{\cos \alpha} = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9}. \text{ Como } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ tenemos:}$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (el signo es negativo porque el ángulo}$$

$$\text{se encuentra en el cuarto cuadrante). } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{1/3} = -2\sqrt{2}$$

2. **[2 puntos]** Un globo aerostático se encuentra sujeto al suelo, mediante dos cables de acero, en dos puntos que distan 60 m. El cable más corto mide 80 m y el ángulo que forma el otro cable con el suelo es de 37° . Calcula la medida del otro cable y la altura a la que se encuentra el globo. Realiza un dibujo de la situación.

Usando el dibujo y aplicando el teorema de los senos, tenemos:



$$\frac{80}{\sin 37^\circ} = \frac{60}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{60 \cdot \sin 37^\circ}{80} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = 0,45 \Rightarrow \alpha = 26,83^\circ.$$

$$\text{Por tanto } \beta = 180^\circ - 37^\circ - 26,83^\circ = 116,17^\circ.$$

Usando otra vez el teorema de los senos:

$$\frac{80}{\sin 37^\circ} = \frac{x}{\sin 116,17^\circ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{80 \cdot \sin 116,17^\circ}{\sin 37^\circ} \Rightarrow x = 119,3 \text{ metros.}$$

$$\text{Además, } \sin 37^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow h = 119,3 \cdot \sin 37^\circ = 71,8 \text{ m.}$$

3. **[2 puntos]** Resolver la siguiente ecuación trigonométrica y el siguiente sistema de ecuaciones trigonométricas, dando las soluciones que se encuentren en el intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ (las del sistema darlas solamente en el primer cuadrante).

a) $\operatorname{tg} x + 2\sin x = 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x + 2\sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin x(1 + 2\cos x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ; x = 180^\circ \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 120^\circ; x = 240^\circ \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \cos x \cdot \sin y = \frac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$. Dividiendo ambas ecuaciones tenemos: $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}}{4}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{2}{6}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30^\circ. \text{ Sustituyendo en la primera ecuación:}$$

$$\sin 30^\circ \cdot \sin y = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin y = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin y = \frac{2\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 45^\circ$$

4. **[3 puntos]** Realiza las siguientes operaciones con números complejos y expresa el resultado en forma binómica:

$$a) \frac{1+i}{(2+i)(3-i)} = \frac{1+i}{6-2i+3i+1} = \frac{1+i}{7+i} = \frac{(1+i)(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{7-i+7i+1}{7^2-i^2} = \frac{8+6i}{49+1} = \frac{8+6i}{50} = \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$$

$$b) \frac{1-2i}{3-i} = \frac{(1-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i-6i-2i^2}{3^2-i^2} = \frac{3-5i+2}{9+1} = \frac{5-5i}{10} = \frac{5}{10} - \frac{5}{10}i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$c) \left(\frac{2}{1-i} \right)^2 = \left(\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} \right)^2 = \left(\frac{2+2i}{1+1} \right)^2 = \left(\frac{2+2i}{2} \right)^2 = (1+i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

5. **[2 puntos]** Halla las cuatro raíces: $\sqrt[4]{4-3i}$

Calcularemos primero el módulo y el argumento del número complejo que se encuentra en el interior de la raíz.

$$4-3i = \left[\begin{array}{l} r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \\ \theta = \arctg \frac{-3}{4} = 143,13^\circ \end{array} \right] = 5_{143,13^\circ}.$$

$$\text{Entonces } \sqrt[4]{4-3i} = \sqrt[4]{5_{143,13^\circ}} = \sqrt[4]{5}_\alpha.$$

Los valores de α se obtienen mediante la fórmula $\alpha = \frac{143,13^\circ + 360^\circ k}{4}$, donde k se mueve entre 0 y 3. Por

tanto, las cuatro raíces que se piden son: $r_1 = \sqrt[4]{5}_{35,78^\circ}$, $r_2 = \sqrt[4]{5}_{125,78^\circ}$, $r_3 = \sqrt[4]{5}_{215,78^\circ}$, $r_4 = \sqrt[4]{5}_{305,78^\circ}$.