

1. [2 puntos] Partiendo de que α y β son ángulos desconocidos, contesta a las siguientes cuestiones:

a) Sabiendo que un ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante y que $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} \alpha$ y de $\cos \alpha$.

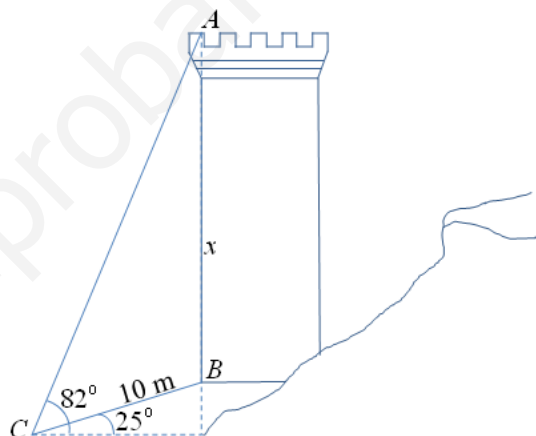
b) Sea $\cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, y $90^\circ < \beta < 180^\circ$. Calcular el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} \beta$ y $\operatorname{tg} \beta$.

2. [2 puntos] Supongamos que α es un ángulo desconocido del primer cuadrante, tal que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$. Calcula, de manera razonada, el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas.

a) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$; b) $\cos(180^\circ - \alpha)$

3. [2 puntos] Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48° . Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14° . Calcular la altura del edificio.

4. [2 puntos] Un pasillo plano de 10 metros de largo y que forma un ángulo de 25° con la horizontal, conduce al pie de una gran torre. Calcular la altura x de ésta, sabiendo que desde el inicio del pasillo el ángulo de elevación de su punto más alto es de 82° . Ayúdate de la figura de la derecha.



5. [1 punto] Demuestra que la siguiente identidad es cierta: $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

6. [1 punto] Teniendo en cuenta que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, simplifica todo lo que puedas la expresión siguiente: $\frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

Soluciones

1. [2 puntos] Partiendo de que α y β son ángulos desconocidos, contesta a las siguientes cuestiones:

- a) Sabiendo que un ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante y que $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$, halla el valor exacto, racionalizado y simplificado de $\operatorname{sen} \alpha$ y de $\cos \alpha$.

De la igualdad conocida $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$, deducimos despejando que $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Sustituyendo este último valor en

$$\text{la igualdad } \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ tenemos: } \frac{5}{4} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2}{3}.$$

Se toma la solución negativa porque el ángulo α se encuentra en el tercer cuadrante y, en este cuadrante, el coseno es negativo. Finalmente, como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$, entonces $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

- b) Siendo $\cos \beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, con $90^\circ < \beta < 180^\circ$, calcular el valor exacto de $\operatorname{sen} \beta$ y $\operatorname{tg} \beta$.

Usando la fórmula fundamental de la trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta + \frac{5}{9} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = 1 - \frac{5}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{4}{9} \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{2}{3}$$

Se ha tomado la solución positiva porque $90^\circ < \beta < 180^\circ$ o, lo que es lo mismo, porque el ángulo β se encuentra en el segundo cuadrante, en el cual el seno es positivo.

$$\text{Finalmente: } \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{2/3}{-\sqrt{5}/3} \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

2. [2 puntos] Supongamos que α es un ángulo desconocido del primer cuadrante, tal que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$. Calcula, de manera razonada, el valor exacto de las siguientes razones trigonométricas.

Antes de nada, haciendo uso de la igualdad fundamental de la trigonometría, tenemos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ Hemos tomado la solución negativa porque el ángulo α se encuentra en el primer cuadrante, donde el coseno es siempre positivo.

$$\text{a) } \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{2\sqrt{2}/3}{1/3} = 2\sqrt{2} \quad (90^\circ - \alpha \text{ y } \alpha \text{ son ángulos complementarios}).$$

$$\text{b) } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (180^\circ - \alpha \text{ y } \alpha \text{ son ángulos suplementarios}).$$

3. [2 puntos] Desde un punto a ras de suelo se ve la azotea de un edificio con un ángulo de elevación de 48° . Avanzando 20 metros en dirección al edificio, el ángulo de elevación se incrementa en 14° . Calcular la altura del edificio.

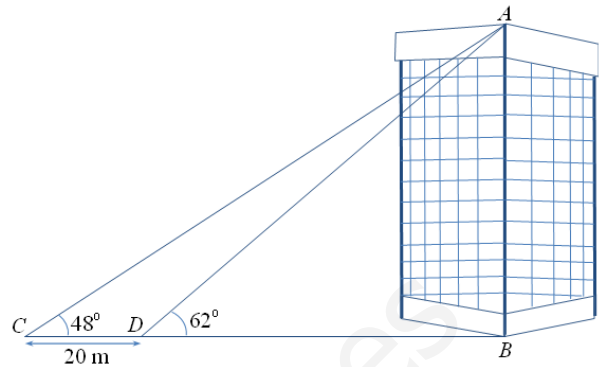
Observando la figura de la derecha es fácil darse cuenta de que el ángulo D es $180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$ y que, por tanto, el ángulo A es $180^\circ - 118^\circ - 48^\circ = 14^\circ$.

Aplicando el teorema de los senos en el triángulo ACD tenemos:

$$\frac{AC}{\sin 118^\circ} = \frac{20}{\sin 14^\circ} \Rightarrow AC = \frac{20 \cdot \sin 118^\circ}{\sin 14^\circ} \cong 73 \text{ m.}$$

Como $\sin 48^\circ = \frac{AB}{AC}$, entonces $AB = AC \cdot \sin 48^\circ$, con lo

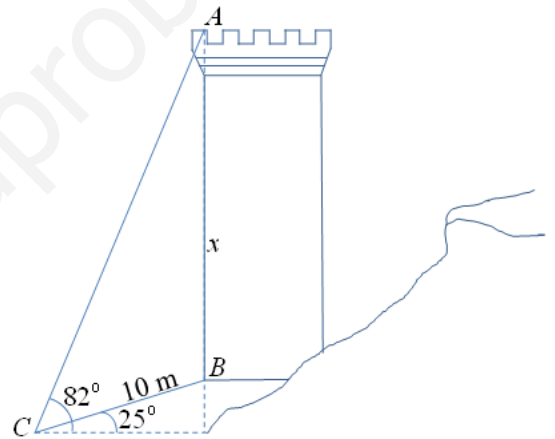
que la altura AB del edificio es: $AB = AC \cdot \sin 48^\circ = 73 \cdot \sin 48^\circ \cong 54,25 \text{ m.}$



4. [2 puntos] Un pasillo plano de 10 metros de largo y que forma un ángulo de 25° con la horizontal, conduce al pie de una gran torre. Calcular la altura x de ésta, sabiendo que desde el inicio del pasillo el ángulo de elevación de su punto más alto es de 82° . Ayúdate de la figura de la derecha.

El ángulo C es, según la figura, igual a $82^\circ - 25^\circ = 57^\circ$; y el ángulo A es igual a $90^\circ - 82^\circ = 8^\circ$. Aplicando el teorema de los senos en el triángulo ABC tenemos:

$$\frac{10}{\sin 8^\circ} = \frac{x}{\sin 57^\circ} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot \sin 57^\circ}{\sin 8^\circ} \cong 60,26 \text{ m}$$



O sea, que la altura de la torre es de 60,26 metros.

5. [1 punto] Demuestra que la siguiente identidad es cierta: $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{\sin x \cancel{\cos y}}{\cos x \cdot \cancel{\cos y}} + \frac{\cancel{\cos x} \sin y}{\cancel{\cos x} \cdot \cos y} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$$

6. [1 punto] Teniendo en cuenta que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, simplifica todo lo que puedas la expresión siguiente: $\frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$.

$$\frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x} (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x.$$