1. Contesta a las siguientes cuestiones:

    a) **[0,5 puntos]** Halla el **valor exacto** de $\cos 1950^{\circ}$, expresándolo como una razón del primer cuadrante.

    b) **[1 punto]** Sabiendo que el ángulo α es desconocido pero que se encuentra en el tercer cuadrante, y que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, calcular el **valor exacto y racionalizado** de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

    c) **[1 punto]** Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = 0,41$ y que $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$, halla de manera razonada $\operatorname{sen}\left(90^{\circ} - \alpha\right)$ y $\operatorname{sen}\left(360^{\circ} - \alpha\right)$, sin calcular previamente el valor del ángulo α.

2. **[1 punto]** Se desea saber la altura de un árbol situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior del árbol desde un cierto punto forma un ángulo de elevación de 17º. Acercándose 25,8 metros hacia la orilla en la dirección del árbol, el ángulo es de 31º. Calcular la altura del árbol.

3. **[1,5 puntos]** Dos circunferencias secantes tienen radios 6 centímetros y 8 centímetros. El ángulo que forman sus dos tangentes comunes es de 30º. Calcula la distancia que hay entre los dos centros.

4. **[2 puntos]** Las diagonales de un paralelogramo miden 5 y 6 centímetros respectivamente. Ambas se cortan bajo un ángulo de 50º. Halla el perímetro del paralelogramo.

5. **[1 punto]** Sabiendo que $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$, calcula el **valor exacto, simplificado y racionalizado** de $1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

6. **[1 punto]** Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{\left(1 - \cos^2 x\right)\cos x} = 4\cos x$.

    Nota: $\operatorname{sen}^2 2x = \left(\operatorname{sen} 2x\right)^2$.

7. **[1 punto]** Simplifica todo lo que puedas la expresión siguiente: $\dfrac{\cos\left(2a - b\right) - \cos\left(2a + b\right)}{\operatorname{sen}\left(2a + b\right) + \operatorname{sen}\left(2a - b\right)}$.

Soluciones

1. Contesta a las siguientes cuestiones:

   a) **[0,5 puntos]** Halla el **<u>valor exacto</u>** de $\cos 1950^{\circ}$, expresándolo como una razón del primer cuadrante.

   Dividiendo 1950° entre 360° se obtiene $1950^{\circ} = 5 \cdot 360^{\circ} + 150^{\circ}$. Por tanto,

   $\cos 1950^{\circ} = \cos 150^{\circ} = -\cos 30^{\circ} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($\cos 150^{\circ} = -\cos 30^{\circ}$ porque 150° y 30° son suplementarios).

   b) **[1 punto]** Sabiendo que el ángulo α es desconocido pero que se encuentra en el tercer cuadrante, y que $\operatorname{tg}\alpha = 1/2$, calcular el **<u>valor exacto y racionalizado</u>** de $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

   $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\cos\alpha}{2} \Leftrightarrow \frac{\cos^2\alpha}{4} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{5\cos^2\alpha}{4} = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{5} \Leftrightarrow$$

   $\Leftrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (solución negativa porque α se encuentra en el tercer cuadrante).

   Como $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{-2\sqrt{5}/5}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

   c) **[1 punto]** Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = 0,41$ y que $0^{\circ} < \alpha < 90^{\circ}$, halla de manera razonada $\operatorname{sen}(90^{\circ} - \alpha)$ y $\operatorname{sen}(360^{\circ} - \alpha)$, sin calcular previamente el valor del ángulo α.

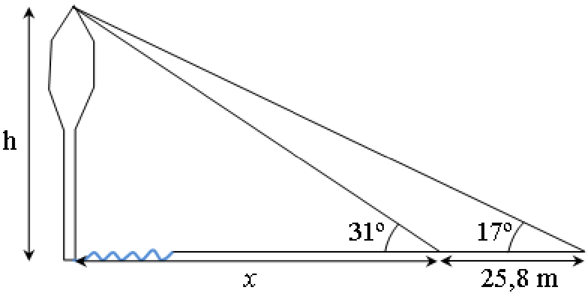
   $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0,41^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - 0,41^2 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - 0,41^2} \Rightarrow \cos\alpha = 0,91$.

   - α y $90^{\circ} - \alpha$ son complementarios, luego $\operatorname{sen}(90^{\circ} - \alpha) = \cos\alpha = 0,91$.
   - $360^{\circ} - \alpha$ y $-\alpha$ tienen las mismas razones trigonométricas, y como $-\alpha$ y α son opuestos se tiene que $\operatorname{sen}(360^{\circ} - \alpha) = \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha = -0,41$.

2. **[1 punto]** Se desea saber la altura de un árbol situado en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior del árbol desde un cierto punto forma un ángulo de elevación de 17º. Acercándose 25,8 metros hacia la orilla en la dirección del árbol, el ángulo es de 31º. Calcular la altura del árbol.

   Obsérvese que el extremo superior del árbol, su base y cada uno de los ángulos de las visuales forman dos triángulos rectángulos. Por tanto:

   $$\begin{cases} \operatorname{tg} 17^{\circ} = \dfrac{h}{x + 25,8} \\ \operatorname{tg} 31^{\circ} = \dfrac{h}{x} \end{cases}$$

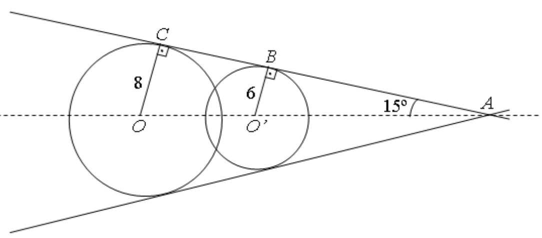
   

   Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} 17^{\circ} = 0,31$ y que $\operatorname{tg} 31^{\circ} = 0,6$; despejando h e igualando se obtiene:

   $0,31(x + 25,8) = 0,6x \Rightarrow 0,31x + 8 = 0,6x \Rightarrow 0,29x = 8 \Rightarrow x = 27,59$ m.

   Sustituyendo se obtiene h: $h = x \cdot \operatorname{tg} 31^{\circ} \Rightarrow h = 27,59 \cdot 0,6 \Rightarrow h = 16,55$ m.

3. **[1,5 puntos]** Dos circunferencias secantes tienen radios 6 centímetros y 8 centímetros. El ángulo que forman sus dos tangentes comunes es de 30º. Calcula la distancia que hay entre los dos centros.

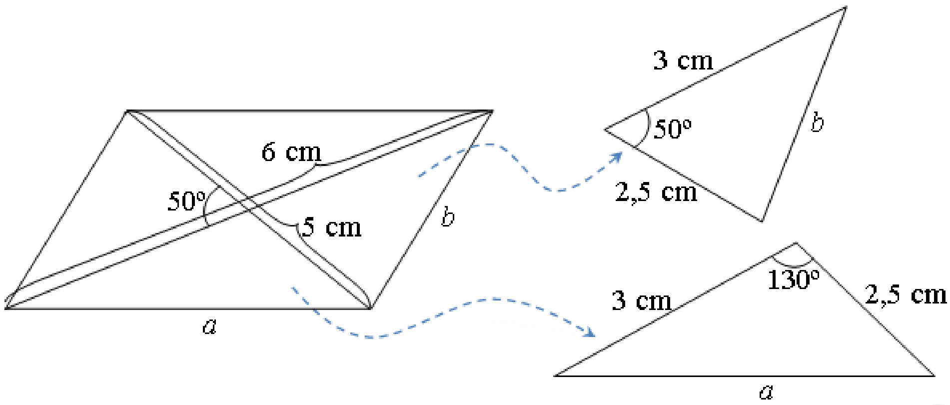
   

   Según la figura de la izquierda los ángulos C y B son rectángulos pues la tangente común es perpendicular al radio. Como las tangentes comunes forman un ángulo de 30°, el ángulo A será justamente la mitad: $A = 15^{\circ}$. Entonces:

   $\operatorname{sen} 15^{\circ} = \dfrac{8}{OA} \Rightarrow OA = 30,91$, $\operatorname{sen} 15^{\circ} = \dfrac{6}{O'A} \Rightarrow O'A = 23,18$

   Por tanto, la distancia entre los centros será: $OO' = OA - O'A = 30,91 - 23,18 \Rightarrow OO' = 7,73$ cm.

4. **[2 puntos]** Las diagonales de un paralelogramo miden 5 y 6 centímetros respectivamente. Ambas se cortan bajo un ángulo de 50º. Halla el perímetro del paralelogramo.



Según la figura, por el teorema del coseno: $\begin{cases} b^2 = 2,5^2 + 3^2 - 2\cdot 2,5\cdot 3\cdot \cos 50^\circ = 5,61 \Rightarrow b = 2,37\,\text{cm}. \\ a^2 = 2,5^2 + 3^2 - 2\cdot 2,5\cdot 3\cdot \cos 130^\circ = 24,89 \Rightarrow a = 4,99\,\text{cm}. \end{cases}$

Por tanto, el perímetro P del paralelogramo es $P = 2a + 2b = 2\cdot 2,37 + 2\cdot 4,99 = 14,72\,\text{cm}$.

5. **[1 punto]** Sabiendo que $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$, calcula el <u>**valor exacto, simplificado y racionalizado**</u> de $1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

$$1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 - \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\cdot \operatorname{tg} x} = 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{1 - 1\cdot\sqrt{2}} = 1 - \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)} = 1 - \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2}{1-2} = 4 + 2\sqrt{2}.$$

6. **[1 punto]** Demuestra la siguiente identidad trigonométrica: $\dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{\left(1-\cos^2 x\right)\cos x} = 4\cos x$.

$$\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{\left(1-\cos^2 x\right)\cos x} \overset{(1)}{=} \frac{\left(2\operatorname{sen} x\cos x\right)^2}{\operatorname{sen}^2 x\cos x} = \frac{4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x\cos x} = 4\cos x.$$

En (1) se ha usado que $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$ ya que, según la fórmula fundamental de la trigonometría, sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

7. **[1 punto]** Simplifica todo lo que puedas la expresión siguiente: $\dfrac{\cos(2a-b) - \cos(2a+b)}{\operatorname{sen}(2a+b) + \operatorname{sen}(2a-b)}$.

$$\frac{\cos(2a-b) - \cos(2a+b)}{\operatorname{sen}(2a+b) + \operatorname{sen}(2a-b)} = \frac{(\cos 2a\cos b + \operatorname{sen} 2a\operatorname{sen} b) - (\cos 2a\cos b - \operatorname{sen} 2a\operatorname{sen} b)}{(\operatorname{sen} 2a\cos b + \cos 2a\operatorname{sen} b) + (\operatorname{sen} 2a\cos b - \cos 2a\operatorname{sen} b)} =$$

$$= \frac{\cos 2a\cos b + \operatorname{sen} 2a\operatorname{sen} b - \cos 2a\cos b + \operatorname{sen} 2a\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} 2a\cos b + \cos 2a\operatorname{sen} b + \operatorname{sen} 2a\cos b - \cos 2a\operatorname{sen} b} = \frac{2\operatorname{sen} 2a\operatorname{sen} b}{2\operatorname{sen} 2a\cos b} = \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \operatorname{tg} b.$$