

EXAMEN 1º BACHILLERATO CIENCIAS – Geometría

Ejercicio 1. (1 pto.)

Escribe la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A (−1; −2) y B (3; 4).

Recuerda que la mediatriz de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ que equidistan de los extremos del segmento de modo que: $d(X, A) = d(X, B)$. Otra forma de decirlo es que la mediatriz es la recta que pasa por el punto medio y es perpendicular a un segmento.

Para resolver el ejercicio debemos suponer que $d(X, A) = d(X, B)$, para A (−1; −2), B (3; 4) y $X(x, y)$.

$$d(X, A) = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 2)^2}$$

$$d(X, B) = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2}$$

Igualemos y elevemos al cuadrado:

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2}$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Rightarrow 2x + 1 + 4y + 4 + 6x - 9 + 8y - 16 = 0 \Rightarrow 8x + 12y - 20 = 0$$

$$\text{Simplificando} \Rightarrow 2x + 3y - 5 = 0$$

Ejercicio 2. (1 pto.)

Escribe la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas $3x + y - 2 = 0$ y $x + 3y - 6 = 0$ ¿Cuántas hay? ¿Cómo son? Representa gráficamente la solución.

Recuerda que la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos $X(x, y)$ que equidistan de los lados de un ángulo. Si el ángulo está formado por las rectas r y s ; entonces $d(X, r) = d(X, s)$.

$$\text{Sean } r: 3x + y - 2 = 0 \quad ; \quad s: x + 3y - 6 = 0$$

Por la definición de bisectriz:

$$d(X, r) = \left| \frac{3x + y - 2}{\sqrt{3^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{3x + y - 2}{\sqrt{10}} \right| = d(X, s) = \left| \frac{x + 3y - 6}{\sqrt{1^2 + 3^2}} \right| = \left| \frac{x + 3y - 6}{\sqrt{10}} \right|$$

Al quitar las barras tenemos dos posibles soluciones

$$1) \quad 3x + y - 2 = x + 3y - 6 \Rightarrow 3x + y - 2 - x - 3y + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x - 2y + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y + 2 = 0$$

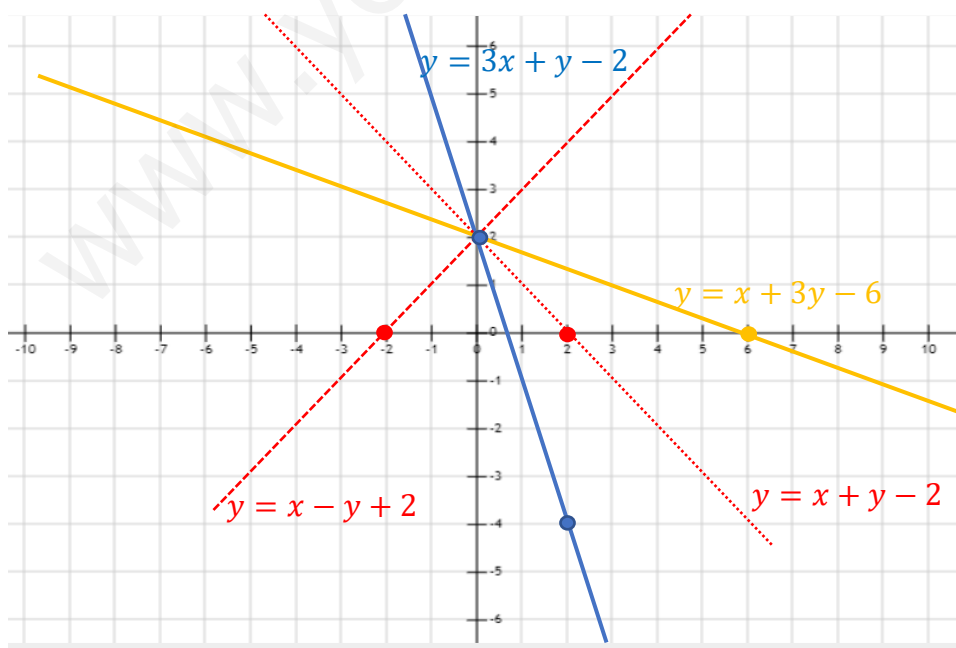
$$2) \quad 3x + y - 2 = -(x + 3y - 6) \Rightarrow 3x + y - 2 + x + 3y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4x + 4y - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + y - 2 = 0$$

Representamos las rectas dando valores a las x y y ; despejando para al menos dos puntos:

$$r: 3x + y - 2 = 0 \begin{cases} \text{para } x = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \\ \text{para } y = -4 \Rightarrow 3x - 4 - 2 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$s: x + 3y - 6 = 0 \begin{cases} \text{para } x = 0 \Rightarrow 3y - 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2 \\ \text{para } y = 0 \Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$$



Las bisectrices son dos que con las rectas forman ángulos iguales dos a dos, estas son rectas perpendiculares. Para representarlas dar valor a x y y :

$$x - y + 2 = 0 \begin{cases} \text{para } x = 0 \Rightarrow -y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \\ \text{para } y = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$$x + y - 2 = 0 \begin{cases} \text{para } x = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \\ \text{para } y = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 3. (2 ptos.)

Calcula la circunferencia que pasa por los puntos A (2; 3); B (-4; -1) y C (6; -3).

Sabemos que el centro de la circunferencia está sobre todas las mediatrices. Calcular las mediatrices de los segmentos AB y AC.

La mediatriz de AB:

$$\overrightarrow{AB} = (-4 - 2; -1 - 3) = (-6; -4)$$

$$\text{El punto medio es M: } A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (2; 3) + (-3; -2) = (-1; 1)$$

$$\text{El vector perpendicular a } \overrightarrow{AB} = \perp \overrightarrow{AB} = (4; -6)$$

La recta que pasa por M (-1; 1) con vector director (4; -6) es

$$m: \frac{x + 1}{4} = \frac{y - 1}{-6} \Rightarrow -6(x + 1) = 4(y - 1)$$

$$\Rightarrow -6x - 6 = 4y - 4 \Rightarrow 6x + 4y + 2 = 0 \Rightarrow 3x + 2y + 1 = 0$$

La mediatriz de AC:

$$\overrightarrow{AC} = (6 - 2; -3 - 3) = (4; -6)$$

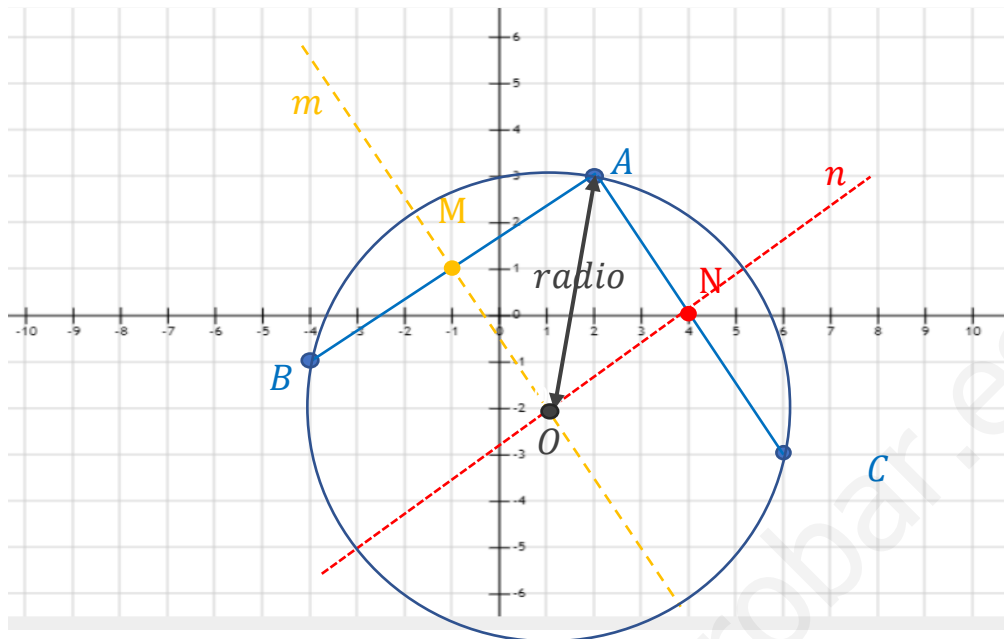
$$\text{El punto medio es N: } A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (2; 3) + (2; -3) = (4; 0)$$

$$\text{El vector perpendicular a } \overrightarrow{AC} = \perp \overrightarrow{AC} = (6; 4)$$

La recta que pasa por M (4; 0) con vector director (6; 4) es

$$n: \frac{x - 4}{6} = \frac{y - 0}{4} \Rightarrow 4(x - 4) = 6(y - 0)$$

$$\Rightarrow 4x - 16 = 6y \Rightarrow 4x - 6y - 16 = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 8 = 0$$



Resolviendo el sistema con las rectas m y n , se obtiene el punto de intersección de ambas:

$$\begin{cases} (1) 3x + 2y + 1 = 0 \\ (2) 2x - 3y - 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Resolver por reducción,} \\ \text{efectuar: } 2 \cdot (2) + 3 \cdot (1) \end{array} \quad \begin{cases} (1) 9x + 6y + 3 = 0 \\ (2) 4x - 6y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$13x - 13 = 0 \Rightarrow 13x = 13 \Rightarrow x = 1 \quad \text{Sustituir el valor de } x \text{ en (1)}$$

$$3 \cdot 1 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow 3 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow y = \frac{-4}{2} = -2$$

Las rectas se intersectan en $O(1; -2)$ que es el centro de la circunferencia.

Para calcular el radio es la distancia de $(1; -2)$ a cualquier punto; por ejemplo $A(2; 3)$:

$$d((2; 3), (1; -2)) = \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 + 2)^2} = \sqrt{(1)^2 + (5)^2} = \sqrt{26}$$

La ecuación de la circunferencia de centro $(1; -2)$ y radio $\sqrt{26}$:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (\sqrt{26})^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 26$$

Recuerda que la circunferencia es el lugar geométrico donde los puntos equidistan de un centro $P(p_1; p_2)$ a una distancia r llamada radio de la circunferencia. La ecuación canónica o reducida de la circunferencia es:

$$(x - p_1)^2 + (y - p_2)^2 = r^2$$

Ejercicio 4. (2 ptos.)

Una elipse tiene focos en $(-3; 2)$ y $(3; 2)$ y pasa por el punto $H(5; 2)$. Calcula su ecuación y dibújala. ¿Cuál es el valor de su excentricidad?

Recuerda que una elipse es el lugar donde dados dos puntos F_1 y F_2 denominados focos todos los P tiene una suma de distancia hacia los focos es constante: $d(P; F_1) + d(P; F_2) = 2a$. Dados dos números positivos a y b ; y un punto $(x_0; y_0)$ llamado centro, la ecuación canónica o reducida de la elipse es la siguiente:

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Para calcular de ecuación de la elipse que tiene focos en $(-3; 2)$ y $(3; 2)$, se aprecia claramente que su centro se encuentra en el punto medio de los dos focos:

$$(x_0; y_0) = \left(\frac{-3 + 3}{2}; \frac{2 + 2}{2}\right) = (0; 2)$$

La distancia entre focos es igual a $2c$:

$$d((-3; 2); (3; 2)) = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (2 - 2)^2} = 6 = 2c \Rightarrow c = \frac{6}{2} = 3$$

Como el punto $(5; 2)$ pertenece a la elipse, calculemos la distancia entre ese punto y los focos que es igual a $2a$.

$$\begin{aligned} d((5; 2); (-3; 2)) + d((5; 2); (3; 2)) &= \\ &= \sqrt{(5 + 3)^2 + (2 - 2)^2} + \sqrt{(5 - 3)^2 + (2 - 2)^2} = 8 + 2 \\ &= 10 = 2a \Rightarrow a = \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

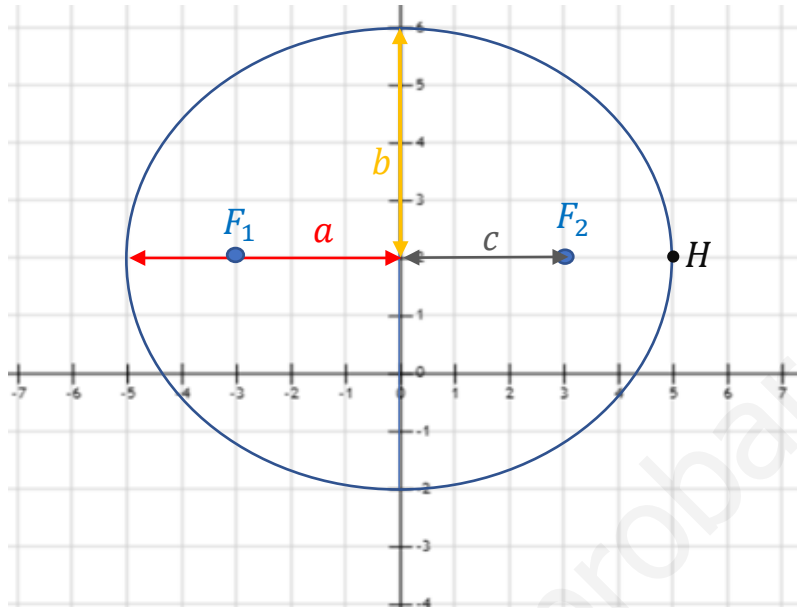
Por el Teorema de Pitágoras de la elipse: $a^2 = b^2 + c^2$, despejamos b :

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

La ecuación de la elipse quedaría:

$$\left(\frac{x - 0}{5}\right)^2 + \left(\frac{y - 2}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y - 2}{4}\right)^2 = 1$$

Se representa gráficamente:



La excentricidad de la elipse:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Ejercicio 5. (2 ptos.)

Considera la hipérbola $x^2 - y^2 + 4y - 8 = 0$. Calcula:

- a) Su ecuación reducida
- b) Su centro y focos.
- c) Su excentricidad

Recuerda que una hipérbola es el lugar donde dados dos puntos F_1 y F_2 denominados focos todos los P tiene una diferencia de distancia hacia los focos es constante: $|d(P; F_1) - d(P; F_2)| = 2a$. Dados dos números positivos a y b ; y un punto $(x_0; y_0)$ llamado centro, la ecuación canónica o reducida de la hipérbola es la siguiente:

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

a) Hallar la ecuación reducida: $x^2 - y^2 + 4y - 8 = 0$

Completar los cuadrados: $1(x - 0)^2 - 1(y - 2)^2 + 4 - 8 = 0$

Dividir entre 4: $\frac{1}{4}(x - 0)^2 - \frac{1}{4}(y - 2)^2 = \frac{4}{4} \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y - 2}{2}\right)^2 = 1$

b) Su centro y focos.

A partir de la ecuación canónica se sabe que el centro es en $(0; 2)$

Para esta hipérbola $a = b = 2$

Por el Teorema de Pitágoras de la hipérbola: $c^2 = a^2 + b^2$, despejamos b:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

Los focos son: $F_1(-c; 2) = (-\sqrt{8}; 2)$ y $F_2(c; 2) = (\sqrt{8}; 2)$

c) Su excentricidad

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{8}}{2} \approx 1,41 \Rightarrow \text{siempre es mayor a } 1$$

Ejercicio 6. (2 pts.)

El vértice de una parábola vertical con las ramas hacia arriba es $(2; -8)$. Sabiendo que pasa por el punto $(0; -6)$, escribe la ecuación de la parábola, represéntala y calcula su foco.

Recuerda que dado un punto llamado foco F y una recta r llamada directriz, la parábola es donde se encuentran los puntos P de manera que hay la misma distancia hasta el foco que a la directriz: $d(P; F) = d(P; r)$. La ecuación canónica de la parábola es:

$$y - y_o = \frac{(x - x_o)^2}{2p}$$

Para calcular la ecuación de la parábola sustituimos el valor del vértice $(2; -8)$ en la ecuación:

$$y + 8 = \frac{(x - 2)^2}{2p} \Rightarrow p = \frac{(x - 2)^2}{2(y + 8)}$$

Despejamos p

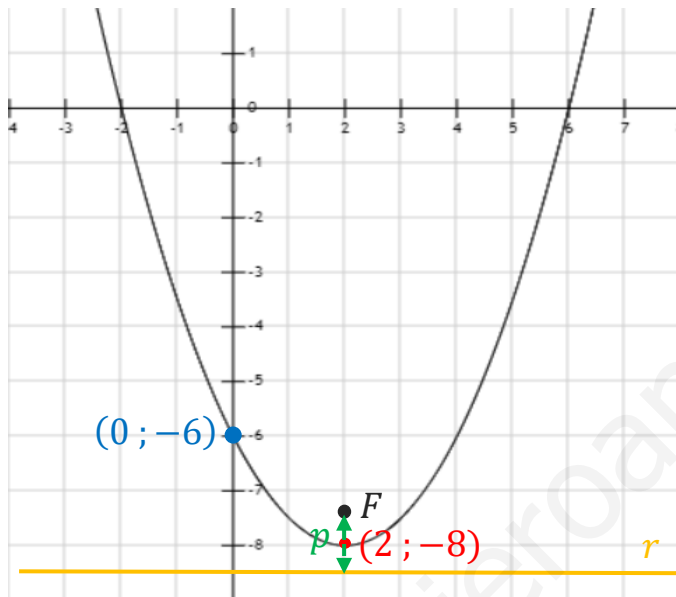
Sustituir los valores del punto $(0; -6)$ que pertenece a la parábola para hallar el valor de p :

$$p = \frac{(x - 2)^2}{2(y + 8)} = \frac{(0 - 2)^2}{2(-6 + 8)} = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1$$

La ecuación queda así:

$$y + 8 = \frac{(x - 2)^2}{2}$$

Se puede también representar de la forma: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$



$p = 1$ es la distancia entre el foco y la directriz;

Por tanto el foco tendrá las coordenadas F (2; -7,5)