

**MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS  
ENSEÑANZAS ACADÉMICAS  
3.º ESO**

**somoslink**

**SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO**

**Unidad 3. Sucesiones**

## Sucesiones

### SOLUCIONES PÁG. 57

- 1 Averigua si los números  $\frac{3}{5}$ ,  $1$ ,  $\frac{18}{17}$  y  $\frac{11}{20}$  son o no términos de la sucesión

$$a_n = \frac{n+1}{2n}.$$

- $\frac{3}{5}$  sí es solución, pues:

$$a_n = \frac{n+1}{2n} \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = \frac{3}{5} \Rightarrow (n+1) \cdot 5 = 2n \cdot 3 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow a_5 = \frac{3}{5}.$$

- $1$  sí es solución, pues:

$$a_n = \frac{n+1}{2n} \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = 1 \Rightarrow n+1 = 2n \Rightarrow n = 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

- $\frac{18}{17}$  no es solución, pues:

$$a_n = \frac{n+1}{2n} \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = \frac{18}{17} \Rightarrow (n+1) \cdot 17 = 2n \cdot 18 \Rightarrow n = \frac{17}{19}, \text{ que no es un número natural.}$$

- $\frac{11}{20}$  sí es solución, pues:

$$a_n = \frac{n+1}{2n} \Rightarrow \frac{n+1}{2n} = \frac{11}{20} \Rightarrow (n+1) \cdot 20 = 2n \cdot 11 \Rightarrow 20n + 20 = 22n \Rightarrow n = \frac{20}{2} = 10 \Rightarrow a_{10} = \frac{11}{20}$$

- 2 Halla el término general de las siguientes sucesiones:

a.  $a_n = \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$

$$a_1 = 0 = 1 - 1 = 2 \cdot 1 - 2 = 4 \cdot 1 - 4$$

$$a_2 = 4 = 4 \cdot 2 - 4$$

$$a_3 = 8 = 4 \cdot 3 - 4$$

$$a_4 = 12 = 4 \cdot 4 - 4$$

$$a_5 = 16 = 4 \cdot 5 - 4$$

Por tanto,  $a_n = 4n - 4$

b.  $b_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$

$$a_1 = \frac{1}{1}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{4}$$

$$a_5 = \frac{1}{5}$$

Por tanto,  $b_n = \frac{1}{n}$

c.  $c_n = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

$$a_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1^2$$

$$a_2 = 4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$a_3 = 9 = 3 \cdot 3 = 3^2$$

$$a_4 = 16 = 4 \cdot 4 = 4^2$$

$$a_5 = 25 = 5 \cdot 5 = 5^2$$

Por tanto,  $c_n = n^2$

d.  $d_n = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \right\}$

$$a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

$$a_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$$

$$a_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

$$a_4 = \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1}$$

$$a_5 = \frac{5}{6} = \frac{5}{5+1}$$

Por tanto,  $d_n = \frac{n}{n+1}$

3 Halla los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones determinadas por su ley de formación:

a. Múltiplos de 3.

$$a_1 = 3 \cdot 1 = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 = 12$$

Por tanto:  $a_n = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$

b. Potencias de -5.

$$b_1 = (-5)^1 = -5$$

$$b_2 = (-5)^2 = 25$$

$$b_3 = (-5)^3 = -125$$

$$b_4 = (-5)^4 = 625$$

Por tanto:  $b_n = \{-5, 25, -125, -625, \dots\}$

c. Cubos de los números naturales.

$$c_1 = 1^3 = 1$$

$$c_2 = 2^3 = 8$$

$$c_3 = 3^3 = 27$$

$$c_4 = 4^3 = 64$$

Por tanto:  $c_n = \{1, 8, 27, 64, \dots\}$

**d. Cocientes de dos números naturales consecutivos.**

$$d_1 = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$d_2 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$d_3 = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$d_4 = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{Por tanto: } d_n = \left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \right\}$$

**4 Copia en tu cuaderno y encuentra el valor de las letras para que las siguientes leyes de recurrencia sean correctas:**

**a.**  $a_n = \{-4, 1, 14, 25, \dots\} \Rightarrow a_n = A \cdot a_{n-1} - B \cdot a_{n-2}$

$$a_1 = -4$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 14$$

$$a_4 = 25$$

Por tanto:

$$a_3 = A \cdot a_{3-1} - B \cdot a_{3-2} = A \cdot 1 - B \cdot (-4) = 14$$

$$a_4 = A \cdot a_{4-1} - B \cdot a_{4-2} = A \cdot 14 - B \cdot 1 = 25$$

Dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left. \begin{array}{l} A + 4 \cdot B = 14 \\ 14 \cdot A - B = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow A = 2, B = 3$$

**b.**  $b_n = \left\{ 24, 6, 2, \frac{3}{2}, \dots \right\} \Rightarrow b_n = \frac{b_{n-2}}{C \cdot b_{n-1}}$

$$b_1 = 24$$

$$b_2 = 6$$

$$b_3 = 2$$

$$b_4 = \frac{3}{2}$$

Por tanto:

$$b_3 = \frac{b_{3-2}}{C \cdot b_{3-1}} = \frac{24}{C \cdot 6} = \frac{4}{C} = 2$$

$$b_4 = \frac{b_{4-2}}{C \cdot b_{4-1}} = \frac{6}{C \cdot 2} = \frac{3}{C} = \frac{3}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4}{C} = 2 \\ \frac{3}{C} = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow C = 2$$

5 Escribe los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones, definidas mediante una ley de recurrencia:

a.  $a_1 = 2$        $a_n = a_{n-1} + 3n$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_{2-1} + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$$

$$a_3 = a_{3-1} + 3 \cdot 3 = 8 + 9 = 17$$

$$a_4 = a_{4-1} + 3 \cdot 4 = 17 + 12 = 29$$

$$a_5 = a_{5-1} + 3 \cdot 5 = 29 + 15 = 44$$

b.  $b_1 = 1$ ;  $b_2 = 5$        $b_n = b_{n-1} - 4 \cdot b_{n-2}$

$$b_1 = 1 \quad b_2 = 5$$

$$b_3 = b_{3-1} - 4 \cdot b_{3-2} = 5 - 4 = 1$$

$$b_4 = b_{4-1} - 4 \cdot b_{4-2} = 1 - 20 = -19$$

$$b_5 = b_{5-1} - 4 \cdot b_{5-2} = -19 - 4 = -23$$

c.  $c_1 = 1$ ;  $c_2 = 2$ ;  $c_3 = 3$        $c_n = c_{n-1} \cdot c_{n-2} + 3 \cdot c_{n-3}$

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 2 \quad c_3 = 3$$

$$c_4 = c_{4-1} \cdot c_{4-2} + 3 \cdot c_{4-3} = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 9$$

$$c_5 = c_{5-1} \cdot c_{5-2} + 3 \cdot c_{5-3} = 9 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 33$$

d.  $d_1 = -1$ ;  $d_2 = 3$        $d_n = \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}$

$$d_1 = -1 \quad d_2 = 3$$

$$d_3 = \frac{d_{3-1}}{d_{3-2}} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$d_4 = \frac{d_{4-1}}{d_{4-2}} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$d_5 = \frac{d_{5-1}}{d_{5-2}} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

6 Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones y estudia el crecimiento de cada una de ellas:

a.  $a_n = 3n + 1$

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

$$a_3 = 3 \cdot 3 + 1 = 10$$

$$a_4 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$$

Por tanto, es creciente.

**b.  $b_n = 1 - n^2$**

$$b_1 = 1 - 1^2 = 0$$

$$b_2 = 1 - 2^2 = -3$$

$$b_3 = 1 - 3^2 = -8$$

$$b_4 = 1 - 4^2 = -15$$

Decreciente.

**c.  $c_n = (-1)^{n+1}$**

$$c_1 = (-1)^2 = 1$$

$$c_2 = (-1)^3 = -1$$

$$c_3 = (-1)^4 = 1$$

$$c_4 = (-1)^5 = -1$$

Alternada.

**7** Escribe el término general de una sucesión que cumpla cada uno de los siguientes criterios:

**a. Ser creciente y tener como primer término 2.**

Por ejemplo,  $a_n = 2n$

$$a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 = 6$$

$$a_4 = 2 \cdot 4 = 8$$

**b. Ser decreciente y tener como segundo término 1.**

Por ejemplo,  $b_n = 3 - n$

$$b_1 = 3 - 1 = 2$$

$$b_2 = 3 - 2 = 1$$

$$b_3 = 3 - 3 = 0$$

$$b_4 = 3 - 4 = -1$$

**c. Ser alternada y tener como tercer término -4.**

Por ejemplo,  $c_n = (-1)^n - 3$

$$c_1 = (-1)^1 - 3 = -4$$

$$c_2 = (-1)^2 - 3 = -2$$

$$c_3 = (-1)^3 - 3 = -4$$

$$c_4 = (-1)^4 - 3 = -2$$

**8** ¿Qué término de la sucesión  $a_n = 5n + 3$  vale 108?

$$a_n = 5n + 3 \Rightarrow 108 = 5n + 3 \Rightarrow n = \frac{105}{5} = 21$$

Por tanto, el término 21.

**9 Si  $a_n = 2n^2 - 23n + 15$ , ¿qué término vale  $-30$ ?**

$$a_n = 2n^2 - 23n + 15 \Rightarrow -30 = 2n^2 - 23n + 15 \Rightarrow 2n^2 - 23n + 45 = 0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{23 \pm \sqrt{23^2 - 4 \cdot 2 \cdot 45}}{2 \cdot 2} = \frac{23 \pm 13}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

El término 9.

La solución de la ecuación:  $\frac{10}{4}$  no es un número natural, por lo que no se considera.

**10 ¿Qué letra sigue en la sucesión A – C – F – J –...?**

La letra Ñ.

$a_1$  = corresponde con la 1.<sup>a</sup> letra del alfabeto = A.

$a_2$  = corresponde con la 3.<sup>a</sup> letra del alfabeto = C.

$a_3$  = corresponde con la 6.<sup>a</sup> letra del alfabeto = F.

$a_4$  = corresponde con la 10.<sup>a</sup> letra del alfabeto = J.

Por lo tanto, la sucesión es 1, 3, 6, 10... que va aumentando una cifra más en cada posición, así, el siguiente número tiene que ser  $10 + 5 = 15$ .

$a_5$  = corresponde con la 15.<sup>a</sup> letra del alfabeto = Ñ.

Así, sucesivamente.

**11 Busca información sobre fenómenos de la naturaleza en los que aparezca la sucesión de Fibonacci.**

Respuesta abierta.

## SOLUCIONES PÁG. 59

**12 Determina si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. En caso afirmativo, calcula la diferencia y el término general y estudia su monotonía.**

**a.  $a_n = \{-19, -15, -11, -7, \dots\}$**

$a_1 = -19$ , y la diferencia con el segundo término es:  $-15 - (-19) = 4$ . Se comprueba con los demás términos la diferencia:

$$-11 - (-15) = 4$$

$$-7 - (-11) = 4$$

Por tanto,  $d = 4$ , sí es una progresión y el término general es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = -19 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 23$$

Es creciente.

**b.  $b_n = \{-21, -24, -27, -30, \dots\}$**

$b_1 = -21$ , y la diferencia con el segundo término es:  $-24 - (-21) = -3$ . Se comprueba con los demás términos la diferencia:

$$-27 - (-24) = -3$$

$$-30 - (-27) = -3$$

Por tanto,  $d = -3$ , sí es una progresión y el término general es:

$$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot d = -21 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n - 18$$

Es decreciente.

**c.  $c_n = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$**

$c_1 = \frac{1}{5}$ , y la diferencia con el segundo término es:  $\frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ . Se comprueba con los demás términos la diferencia:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

Por tanto,  $d = \frac{1}{5}$ , sí es una progresión y el término general es:

$$c_n = c_1 + (n - 1) \cdot d = \frac{1}{5} + (n - 1) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}n$$

Es creciente.

$$d. d_n = \{\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, \dots\}$$

$d_1 = \sqrt{3}$ , y la diferencia con el segundo término es:  $2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ . Se comprueba con los demás términos la diferencia:

$$3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Por tanto,  $d = \sqrt{3}$ , sí es una progresión y el término general es:

$$d_n = d_1 + (n - 1) \cdot d = \sqrt{3} + (n - 1) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} n$$

Es creciente.

- 13** ¿Es la sucesión  $\{-3, 2, 7, 12, \dots\}$  una progresión aritmética? Si lo es, halla la diferencia, el término general y el término 38.

En una progresión aritmética, cada uno de los términos es igual al anterior más la diferencia.

$$2 - (-3) = 5$$

$$7 - 2 = 5$$

$$12 - 7 = 5$$

Por tanto,  $d = 5$  y el término general es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = -3 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 8.$$

$$a_{38} = 5 \cdot 38 - 8 = 182.$$

- 14** Determina los seis primeros términos y  $a_n$  de una progresión aritmética en la que  $d = -3$  y  $a_1 = 6$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 6 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 9$$

$$a_1 = -3 \cdot 1 + 9 = 6$$

$$a_2 = -3 \cdot 2 + 9 = 3$$

$$a_3 = -3 \cdot 3 + 9 = 0$$

$$a_4 = -3 \cdot 4 + 9 = -3$$

$$a_5 = -3 \cdot 5 + 9 = -6$$

$$a_6 = -3 \cdot 6 + 9 = -9$$

$$a_n = \{6, 3, 0, -3, -6, -9\}$$

- 15** De una progresión aritmética se sabe que su noveno término es 9, y su diferencia, 5. Halla el primer término de la sucesión.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_9 = a_1 + (9 - 1) \cdot 5 \Rightarrow 9 = a_1 + 40 \Rightarrow a_1 = -31$$

- 16** Halla el término general de una progresión aritmética de la que se conocen  $d = -3$  y  $a_2 = 5$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_2 = a_1 + (2 - 1) \cdot (-3) \Rightarrow 5 = a_1 - 3 \Rightarrow a_1 = 8$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 8 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 11$$

- 17** Los siguientes datos corresponden a progresiones aritméticas. Encuentra el valor del dato que se pide en cada caso.

- a.**  $a_1 = 4$ ,  $d = -1$ ; calcula  $a_{12}$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_n = 4 + (n - 1) \cdot (-1) = -n + 5 \Rightarrow a_{12} = -12 + 5 = -7$$

- b.**  $a_{10} = 34$ ,  $a_1 = 7$ ; calcula  $d$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_{10} = 7 + (10 - 1) \cdot d \Rightarrow 34 = 7 + (10 - 1) \cdot d \Rightarrow 34 = 7 + 9d \Rightarrow d = 3$$

- c.**  $a_1 = 5$ ,  $a_{13} = -19$ ; calcula  $a_8$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_{13} = 5 + (13 - 1) \cdot d \Rightarrow -19 = 5 + 12d \Rightarrow d = -2$$

$$a_8 = 5 + (8 - 1) \cdot (-2) = -9$$

- d.**  $a_6 = -2$ ,  $a_{11} = 8$ ; calcula  $d$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot d \Rightarrow -2 = a_1 + 5d$$

$$a_{11} = a_1 + (11 - 1) \cdot d \Rightarrow 8 = a_1 + 10d$$

$$a_1 = -2 - 5d, \text{ se sustituye } a_1 \text{ en la expresión obtenida de } a_{11}:$$

$$8 = -2 - 5d + 10d \Rightarrow d = \frac{10}{5} = 2$$

- e.**  $a_1 = 3$ ,  $a_n = 47$ ,  $d = 4$ ; calcula  $n$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$47 = 3 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow n = \frac{44}{4} = 12$$

**18 Interpola tres medios aritméticos entre los números:****a. -3 y 13**

$a_1 = -3$  y  $a_5 = 13$ , hay que hallar:  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$13 = -3 + (5 - 1) \cdot d \Rightarrow 16 = 4d \Rightarrow d = 4$$

$$a_2 = a_1 + d = -3 + 4 = 1$$

$$a_3 = a_2 + d = 1 + 4 = 5$$

$$a_4 = a_3 + d = 5 + 4 = 9$$

**b. -6 y -38**

$a_1 = -6$  y  $a_5 = -38$ , hay que hallar:  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$-38 = -6 + (5 - 1) \cdot d \Rightarrow -32 = 4d \Rightarrow d = -8$$

$$a_2 = a_1 + d = -6 - 8 = -14$$

$$a_3 = a_2 + d = -14 - 8 = -22$$

$$a_4 = a_3 + d = -22 - 8 = -30$$

**c.  $\frac{3}{4}$  y  $\frac{11}{4}$** 

$a_1 = \frac{3}{4}$  y  $a_5 = \frac{11}{4}$ , hay que hallar:  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$\frac{11}{4} = \frac{3}{4} + (5 - 1) \cdot d \Rightarrow \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = 4d \Rightarrow 2 = 4d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = a_1 + d = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$a_3 = a_2 + d = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$$

$$a_4 = a_3 + d = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

**d.  $\sqrt{5}$  y  $13\sqrt{5}$** 

$a_1 = \sqrt{5}$  y  $a_5 = 13\sqrt{5}$ , hay que hallar:  $a_2$ ,  $a_3$  y  $a_4$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$13\sqrt{5} = \sqrt{5} + (5 - 1) \cdot d \Rightarrow 13\sqrt{5} - \sqrt{5} = 4d \Rightarrow 12\sqrt{5} = 4d \Rightarrow d = 3\sqrt{5}$$

$$a_2 = a_1 + d = \sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$a_3 = a_2 + d = 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$$

$$a_4 = a_3 + d = 7\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

**19 El alquiler municipal de bicicletas cuesta 5 € la primera hora y 0,25 € menos cada hora sucesiva.**

**a. ¿Cuánto pagará Berta por usar la bicicleta 5 horas?**

$$a_1 = 5 \text{ €}; d = -0,25 \text{ €}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_2 = 5 + (2 - 1) \cdot (-0,25) = 5 - 0,25 = 4,75 \Rightarrow a_2 = 4,75 \text{ €}$$

$$a_3 = 5 + (3 - 1) \cdot (-0,25) = 5 - 0,50 = 4,5 \Rightarrow a_3 = 4,5 \text{ €}$$

$$a_4 = 5 + (4 - 1) \cdot (-0,25) = 5 - 0,75 = 4,25 \Rightarrow a_4 = 4,25 \text{ €}$$

$$a_5 = 5 + (5 - 1) \cdot (-0,25) = 5 - 1 = 4 \Rightarrow a_5 = 4 \text{ €}$$

$$S_5 = 5 + 4,75 + 4,5 + 4,25 + 4 = 22,5 \Rightarrow S_5 = 22,5 \text{ €}$$

Pagará 22,5 €.

**b. ¿Hay alguna expresión general que permita expresar el precio del alquiler de las bicicletas según el número de horas?**

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5 + (n - 1) \cdot (-0,25) = 5,25 - 0,25n$$

**SOLUCIONES PÁG. 61**

**20 Si en una progresión aritmética  $a_3 + a_{15} = 24$ , ¿se puede afirmar que  $a_5 + a_{13} = 24$ ? Razona la respuesta con tu compañero.**

Sí, pues la suma de los términos equidistantes de la progresión es constante:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$$

21 Calcula la suma de los doce primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas, de las que se conocen sus términos generales:

a.  $a_n = -4n + 3$

La suma de los  $n$  primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$a_1 = -4 \cdot 1 + 3 = -1$$

$$a_{12} = -4 \cdot 12 + 3 = -48 + 3 = -45$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{12} = \frac{[-1 + (-45)] \cdot 12}{2} = -276$$

b.  $b_n = \frac{4}{3}n - 2$

$$b_1 = \frac{4}{3} \cdot 1 - 2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$b_{12} = \frac{4}{3} \cdot 12 - 2 = \frac{48}{3} - 2 = 14$$

$$S_n = \frac{(b_1 + b_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{12} = \frac{\left(\frac{-2}{3} + 14\right) \cdot 12}{2} = \frac{\left(\frac{40}{3}\right) \cdot 12}{2} = 80$$

c.  $c_n = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}n$

$$c_1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 1 = -1$$

$$c_{12} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot 12 = -\frac{14}{3}$$

$$S_n = \frac{(c_1 + c_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{12} = \frac{\left[-1 + \left(-\frac{14}{3}\right)\right] \cdot 12}{2} = \frac{\left(-\frac{17}{3}\right) \cdot 12}{2} = -34$$

**22** Calcula la suma de los quince primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas:

**a.**  $a_n = \{7, 12, 17, 22, \dots\}$

Se averigua el término  $a_{15}$  a partir de los datos que nos dan:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_2 = 7 + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow 12 = 7 + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow d = 5$$

$$a_{15} = 7 + (15 - 1) \cdot 5 = 77$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{(7 + 77) \cdot 15}{2} = 630$$

**b.**  $b_n = \{-15, -18, -21, -24, \dots\}$

Se averigua el término  $b_{15}$  a partir de los datos que nos dan:

$$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow b_2 = -15 + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow -18 = -15 + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow d = -3$$

$$b_{15} = -15 + (15 - 1) \cdot (-3) = -57$$

$$S_n = \frac{(b_1 + b_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{[-15 + (-57)] \cdot 15}{2} = -540$$

**c.**  $c_n = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{16}{15}, \frac{26}{15}, \frac{12}{5}, \dots \right\}$

Se averigua el término  $c_{15}$  a partir de los datos que nos dan:

$$c_n = c_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow c_2 = \frac{2}{5} + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow \frac{16}{15} = \frac{2}{5} + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

$$c_{15} = \frac{2}{5} + (15 - 1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{146}{15}$$

$$S_n = \frac{(c_1 + c_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{\left[ \left( \frac{2}{5} \right) + \left( \frac{146}{15} \right) \right] \cdot 15}{2} = 76$$

**d.**  $d_n = \{0,25; 0,5; 0,75; 1; \dots\}$

Se averigua el término  $d_{15}$  a partir de los datos que nos dan:

$$d_n = d_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow d_2 = 0,25 + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow 0,5 = 0,25 + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = 0,25$$

$$d_{15} = 0,25 + (15 - 1) \cdot 0,25 = 3,75$$

$$S_n = \frac{(d_1 + d_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{(0,25 + 3,75) \cdot 15}{2} = 30$$

- 23 Dada la progresión aritmética  $\{-2, 1, 4, 7, \dots\}$ , ¿cuántos términos han de sumarse para que el resultado sea 1 333?**

Se averigua la expresión general a partir de los datos del problema:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_2 = -2 + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow 1 = -2 + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow d = 3$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = -2 + (n - 1) \cdot 3 = -5 + 3n$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow 1\,333 = \frac{[-2 + (-5 + 3n)] \cdot n}{2} \Rightarrow 3n^2 - 7n - 2\,666 = 0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 3 \cdot (-2\,666)}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 3 \cdot (-2\,666)}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{7 \pm 179}{2 \cdot 3} = 31$$

El valor negativo no tiene sentido. Por tanto, se deben sumar 31 términos.

- 24 De una progresión aritmética se conocen  $a_2 = -10$  y  $a_{19} = 24$ ; calcula:**

**a. La diferencia y el primer término.**

A partir de la expresión general se calcula  $d$  y  $a_1$ :

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \Rightarrow a_2 = a_1 + (2 - 1) \cdot d \Rightarrow -10 = a_1 + (2 - 1) \cdot d = a_1 + d$$

$$a_{19} = a_1 + (19 - 1) \cdot d \Rightarrow 24 = a_1 + 18d$$

Se resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$-10 = a_1 + d$$

$$24 = a_1 + 18d$$

Se despeja en la primera  $a_1$  y se sustituye en la segunda ecuación:

$$24 = (-10 - d) + 18d \Rightarrow 24 = -10 + 17d \Rightarrow 24 + 10 = 17d \Rightarrow d = 2$$

$$a_1 = -10 - d = -12$$

**b. El término general.**

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = -12 + 2n - 2 \Rightarrow a_n = -14 + 2n$$

**c. La suma de los diecinueve primeros términos.**

$$a_{19} = -14 + 2 \cdot 19 = 24$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{19} = \frac{(-12 + 24) \cdot 19}{2} = 114$$

**25 Calcula la suma de los veinte primeros números impares.**

Los números impares son: 1, 3, 5, 7, ...; donde  $a_1 = 1$  y  $d = 2$ .

El término general es:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1 + 2n - 2 \Rightarrow a_n = -1 + 2n$

$$a_{20} = -1 + 2 \cdot 20 = 39$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{(1 + 39) \cdot 20}{2} = 400$$

**26 Si  $a_1 = 5$  y  $S_{20} = 230$ , halla el valor del vigésimo término.**

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{(5 + a_{20}) \cdot 20}{2} \Rightarrow 230 = \frac{5 \cdot 20 + a_{20} \cdot 20}{2} \Rightarrow a_{20} = \frac{360}{20} = 18$$

**27 Halla el valor de  $a_1$  en una progresión aritmética de la que se conocen  $a_{16} = 6$  y  $S_{16} = 72$ .**

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{16} = \frac{(a_1 + a_{16}) \cdot 16}{2} \Rightarrow 72 = \frac{(a_1 + 6) \cdot 16}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{48}{16} = 3$$

**28 De una progresión aritmética se conocen  $a_1 = 2$  y  $S_7 = 77$ . Halla  $a_7$ .**

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_7 = \frac{(2 + a_7) \cdot 7}{2} \Rightarrow 77 = \frac{2 \cdot 7 + a_7 \cdot 7}{2} \Rightarrow a_7 = \frac{140}{7} = 20$$

**29 Calcula  $S_{12}$ , sabiendo que el primer término y el octavo de la progresión aritmética son, respectivamente, 8 y 2.**

A partir del término general se calcula  $a_{12}$ :  $a_n = a_1 + (n - 1) d$

$$a_8 = a_1 + (n - 1) d \Rightarrow 2 = 8 + 7d \Rightarrow d = \frac{-6}{7}$$

$$a_{12} = 8 + (12 - 1) \cdot \left(\frac{-6}{7}\right) = 8 - \frac{66}{7} = \frac{-10}{7}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_{12} = \frac{\left[8 + \left(\frac{-10}{7}\right)\right] \cdot 12}{2} = \left[8 - \frac{10}{7}\right] \cdot 6 = 8 \cdot 6 - \frac{10}{7} \cdot 6 = \frac{276}{7}$$

- 30** Un hortelano riega su huerto con el agua de un pozo. Si el lunes utiliza 150 L y cada día emplea 5 L menos que el anterior, ¿cuántos litros habrá consumido el domingo? ¿Y en total?

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_7 = 150 + 6 \cdot (-5) = 120$$

Habrá utilizado 120 L el domingo.

$$S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} = \frac{(150 + 120) \cdot 7}{2} = 945 \text{ L}$$

Habrá utilizado 945 L en total.

- 31** Actividad resuelta.

- 32** Las alturas de cuatro amigos están en progresión aritmética. Si el más bajo mide 24 cm menos que el más alto, y entre todos suman 6,56 m, ¿cuál es la altura de cada uno?



$$a_1 = a_4 - 24$$

$$S_4 = \frac{(a_1 + a_4) \cdot 4}{2} \Rightarrow 656 = \frac{[(a_4 - 24) + a_4] \cdot 4}{2} \Rightarrow 656 = \frac{8a_4 - 96}{2} \Rightarrow a_4 = 176 \text{ cm}$$

$$a_1 = a_4 - 24 = 176 - 24 = 152 \text{ cm}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot d \Rightarrow 176 = 152 + 3d \Rightarrow d = 8 \text{ cm}$$

$$a_2 = a_1 + 8 = 152 + 8 = 160 \text{ cm}$$

$$a_3 = a_2 + 8 = 160 + 8 = 168 \text{ cm}$$

- 33** Un alumno debe entregar, en un plazo de 7 días, un trabajo que consta de 49 ejercicios. Si cada día hace 2 ejercicios más que el anterior y el último día ha hecho 13 ejercicios, ¿cuántos hizo el primero?

$$S_7 = 49; d = 2; a_7 = 13$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} \Rightarrow 49 = \frac{(a_1 + 13) \cdot 7}{2} \Rightarrow 98 = 7a_1 + 91 \Rightarrow a_1 = 1$$

- 34** En grupos de tres compañeros, construid una torre de naipes de 1, 2, 3 y 4 pisos. ¿Cuántas cartas necesitáis para construir cada piso? ¿Y para construir una torre de 25 pisos? Encontrad el término general de la sucesión de cartas de cada piso.

La sucesión de naipes (por piso) es una progresión aritmética con  $a_1 = 2$  y  $d = 3$ , luego su término general es  $a_n = 3n - 1$  y el término  $a_{25} = 74$ .

Luego el número total de naipes de una torre de  $n$  pisos es la suma del número de naipes de los  $n$  primeros pisos de la progresión, es decir,  $S_{25} = 950$ .

### SOLUCIONES PÁG. 63

- 35** Determina si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. En caso afirmativo, calcula la razón y el término general y estudia su monotonía.

a.  $a_n = \{6, -12, 24, -48, \dots\}$

$$a_1 = 6 \text{ y la razón es: } r = \frac{-12}{6} = \frac{24}{-12} = -2$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 6 \cdot (-2)^{n-1}$$

Como  $a_1 > 0$  y  $r < 0$ , es alternada.

b.  $b_n = \left\{ \frac{2}{5}, 2, 10, 50, \dots \right\}$

$$b_1 = \frac{2}{5} \text{ y la razón es: } r = \frac{2}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{2} = 5$$

$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} = \frac{2}{5} \cdot 5^{n-1} = 2 \cdot 5^{-1} \cdot 5^{n-1} = 2 \cdot 5^{n-2}$$

Como  $b_1 > 0$  y  $r > 1$ , es creciente.

$$c. c_n = \left\{ -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \dots \right\}$$

$$c_1 = -\frac{4}{3} \text{ y la razón es: } r = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$c_n = c_1 \cdot r^{n-1} = -\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Como  $c_1 < 0$  y  $0 < r < 1$ , es creciente.

$$d. d_n = \{2, 2\sqrt{3}, 6, 6\sqrt{3}, \dots\}$$

$$d_1 = 2 \text{ y la razón es: } r = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$d_n = d_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot (\sqrt{3})^{n-1}$$

Como  $d_1 > 0$  y  $r > 0$ , es creciente.

**36 Si en una progresión geométrica  $a_6 \cdot a_{21} = 16$ , ¿puede afirmarse que  $a_{12} \cdot a_{15} = 16$ ? Razona la respuesta junto con tu compañero.**

Sí, pues el producto de los términos equidistantes de una progresión geométrica es constante.

Partiendo del término general:  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ . A continuación, se sustituyen los datos del problema:

La primera relación es:

$$a_6 = a_1 \cdot r^5$$

$$a_{21} = a_1 \cdot r^{20}$$

Según el enunciado:

$$a_1 \cdot r^5 \cdot a_1 \cdot r^{20} = 16 \Rightarrow a_1^2 \cdot r^{25} = 16 \Rightarrow a_1 = \sqrt{\frac{16}{r^{25}}}$$

La segunda relación es:

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= a_1 \cdot r^{11} \\ a_{15} &= a_1 \cdot r^{14} \end{aligned} \right\}$$

Según el enunciado:

$$a_1 \cdot r^{11} \cdot a_1 \cdot r^{14} = 16 \Rightarrow a_1^2 \cdot r^{25} = 16 \Rightarrow a_1 = \sqrt{\frac{16}{r^{25}}}$$

Como  $a_1$  es el mismo en ambas relaciones, se cumple el enunciado.

37 Escribe los cinco primeros términos y el término general de las siguientes progresiones geométricas:

a.  $a_1 = 2$ ,  $r = 3$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$a_1 = 2 \cdot 3^{1-1} = 2$$

$$a_2 = 2 \cdot 3^{2-1} = 2 \cdot 3^1 = 6$$

$$a_3 = 2 \cdot 3^{3-1} = 2 \cdot 3^2 = 18$$

$$a_4 = 2 \cdot 3^{4-1} = 2 \cdot 3^3 = 54$$

$$a_5 = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 162$$

b.  $a_1 = 4$ ,  $r = -\frac{1}{2}$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_1 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 4$$

$$a_2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1} = -2$$

$$a_3 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 1$$

$$a_4 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{4-1} = -\frac{1}{2}$$

$$a_5 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{1}{4}$$

c.  $a_1 = 3$ ,  $r = \sqrt{2}$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot (\sqrt{2})^{n-1}$$

$$a_1 = 3 \cdot (\sqrt{2})^{1-1} = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot (\sqrt{2})^{2-1} = 3\sqrt{2}$$

$$a_3 = 3 \cdot (\sqrt{2})^{3-1} = 6$$

$$a_4 = 3 \cdot (\sqrt{2})^{4-1} = 6\sqrt{2}$$

$$a_5 = 3 \cdot (\sqrt{2})^{5-1} = 12$$

- 38 El quinto término de una progresión geométrica es 81 y el primero es 1. Halla los cinco primeros términos de dicha progresión.**

$$a_5 = 81; a_1 = 1$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow 81 = 1 \cdot r^4 \Rightarrow r = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = \pm 3$$

Con  $r = +3$ :

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 \cdot 3^{2-1} = 3$$

$$a_3 = 1 \cdot 3^2 = 9$$

$$a_4 = 1 \cdot 3^3 = 27$$

$$a_5 = 1 \cdot 3^4 = 81$$

Con  $r = -3$ :

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 \cdot (-3)^{2-1} = -3$$

$$a_3 = 1 \cdot (-3)^2 = 9$$

$$a_4 = 1 \cdot (-3)^3 = -27$$

$$a_5 = 1 \cdot (-3)^4 = 81$$

- 39 Halla el término general de una progresión geométrica de razón positiva, de la que se conocen su cuarto término, 256, y vigésimo,  $\frac{1}{256}$ .**

$$a_4 = 256; a_{20} = \frac{1}{256}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow 256 = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow a_1 = \frac{256}{r^3}$$

Sustituimos  $a_1$  en la ecuación  $a_{20}$ :

$$a_{20} = a_1 \cdot r^{20-1} = a_1 \cdot r^{19} \Rightarrow \frac{1}{256} = \frac{256}{r^3} \cdot r^{19} \Rightarrow \frac{1}{256} = 256 \cdot r^{16} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{256}{r^3} = \frac{256}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 2^{11}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \Rightarrow a_n = 2^{11} \cdot (2^{-1})^{(n-1)} \Rightarrow a_n = 2^{11} \cdot 2^{-n+1} \Rightarrow a_n = 2^{12-n}$$

- 40 Los siguientes datos corresponden a progresiones geométricas. Halla el valor del dato que se pide en cada caso.**

**a.  $a_1 = -5$ ,  $r = -2$ ; calcula  $a_6$ .**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_6 = -5 \cdot (-2)^{6-1} = -5 \cdot (-32) = 160$$

**b.  $a_9 = 81$ ;  $r = \frac{1}{3}$ ; calcula  $a_1$ .**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$81 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{9-1} \Rightarrow 3^4 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \Rightarrow a_1 = 3^{12}$$

**c.  $a_3 = 0,1$ ,  $a_7 = 0,000\ 000\ 1$ ; calcula  $r$ .**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^{3-1} = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow 0,1 = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow a_1 = \frac{0,1}{r^2}$$

$$a_7 = a_1 \cdot r^{7-1} = a_1 \cdot r^6 \Rightarrow 10^{-7} = a_1 \cdot r^6$$

Se sustituye el valor de  $a_1$  en la segunda ecuación:

$$10^{-7} = \frac{0,1}{r^2} \cdot r^6 \Rightarrow 10^{-7} = 10^{-1} \cdot r^4 \Rightarrow 10^{-6} = r^4 \Rightarrow$$

$$r = \sqrt[4]{10^{-6}} = \sqrt[2 \cdot 2]{10^{-(3 \cdot 2)}} = \pm \sqrt{10^{-3}} = \pm \sqrt{\frac{1}{10^3}}$$

**d.  $a_1 = 3$ ,  $a_n = 96$ ,  $r = 2$ ; calcula  $n$ .**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$96 = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 3 \cdot 2^5 = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow n = 5 + 1 = 6$$

**41 Interpola tres medios geométricos entre los números:**

**a. 16 y 1**

$$16, x_1, x_2, x_3, 1$$

$$a_1 = 16 \text{ y } a_5 = 1$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \Rightarrow 1 = 16 \cdot r^4 \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2^4}} = \pm \frac{1}{2}$$

Hay dos soluciones posibles, según sea  $r = +\frac{1}{2}$  o  $r = -\frac{1}{2}$ .

Para  $r = +\frac{1}{2}$ :

$$x_1 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 8 \quad x_2 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \quad x_3 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2$$

Para  $r = -\frac{1}{2}$ :

$$x_1 = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8 \quad x_2 = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \quad x_3 = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -2$$

**b. -162 y -2**

$$-162, x_1, x_2, x_3, -2$$

$$a_1 = -162 \text{ y } a_5 = -2$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \Rightarrow -2 = -162 \cdot r^4 \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{2}{162}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^4}} = \pm \frac{1}{3}$$

Hay dos soluciones posibles, según sea  $r = +\frac{1}{3}$  o  $r = -\frac{1}{3}$ .

Para  $r = +\frac{1}{3}$ :

$$x_1 = (-162) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = -54 \quad x_2 = (-162) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -18 \quad x_3 = (-162) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = -6$$

Para  $r = -\frac{1}{3}$ :

$$x_1 = (-162) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 54 \quad x_2 = (-162) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -18 \quad x_3 = (-162) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = 6$$

**c.  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{27}{625}$** 

$$\frac{1}{3}, x_1, x_2, x_3, \frac{27}{625}$$

$$a_1 = \frac{1}{3} \text{ y } a_5 = \frac{27}{625}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \Rightarrow \frac{27}{625} = \frac{1}{3} \cdot r^4 \Rightarrow r^4 = \frac{3^4}{5^4} \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{3^4}{5^4}} = \pm \frac{3}{5}$$

Hay dos soluciones posibles, según sea  $r = +\frac{3}{5}$  o  $r = -\frac{3}{5}$ .

Para  $r = +\frac{3}{5}$ :

$$x_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{25} \quad x_3 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{9}{125}$$

Para  $r = -\frac{3}{5}$ :

$$x_1 = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{25} \quad x_3 = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\frac{9}{125}$$

**d. 1 y 4**

$$1, x_1, x_2, x_3, 4$$

$$a_1 = 1 \text{ y } a_5 = 4$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \Rightarrow 4 = 1 \cdot r^4 \Rightarrow r = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \pm\sqrt{2}$$

Hay dos soluciones posibles, según sea  $r = +\sqrt{2}$  o  $r = -\sqrt{2}$ .

Para  $r = +\sqrt{2}$ :

$$x_1 = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \qquad x_2 = 1 \cdot (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad x_3 = 1 \cdot (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

Para  $r = -\sqrt{2}$ :

$$x_1 = 1 \cdot (-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \qquad x_2 = 1 \cdot (-\sqrt{2})^2 = 2 \qquad x_3 = 1 \cdot (-\sqrt{2})^3 = -2\sqrt{2}$$

- 42** En el laboratorio de Biología de su instituto, Laura está trabajando con un cultivo formado por 30 bacterias. Si estos microorganismos se reproducen por bipartición cada 15 minutos, ¿cuántas habrá en el cultivo al cabo de 6 horas?

Como se reproducen por bipartición,  $r = 2$

6 horas · 60 minutos/hora = 360 minutos

$$\frac{360}{15} = 24 \Rightarrow \text{el número de medios geométricos son 24.}$$

La sucesión obtenida es:  $\{a_1, a_2, \dots, a_{24}\}$  y como  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$  y  $a_1 = 30$ , entonces:  
 $a_{24} = 30 \cdot 2^{24-1} = 30 \cdot 2^{23} = 251\,658\,240$  bacterias que se han reproducido al cabo de 6 horas.

### SOLUCIONES PÁG. 65

43 Calcula el producto de los cinco primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

a.  $a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1}$

A partir de la siguiente expresión se calcula el producto de los  $n$  términos de una progresión geométrica:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

En nuestro caso, se tiene que calcular los cinco primeros términos. Primero se halla  $a_1$  y  $a_5$ , y por último  $P_5$ :

$$a_1 = \frac{1}{3} \cdot 3^{1-1} = \frac{1}{3}; a_5 = \frac{1}{3} \cdot 3^{5-1} = \frac{1}{3} \cdot 3^4 = 27$$

$$P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} \cdot 27\right)^5} = \sqrt{\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3\right)^5} = 3^5 = 243$$

b.  $b_n = 2^{n-1}$

Primero se calcula  $a_1$  y  $a_5$ , y por último  $P_5$ :

$$b_1 = 2^{1-1} = 1; b_5 = 2^{5-1} = 2^4 = 16$$

$$P_5 = \sqrt{(b_1 \cdot b_5)^5} = \sqrt{(1 \cdot 16)^5} = \sqrt{(2^4)^5} = 2^{10} = 1024$$

c.  $c_n = 4 \cdot 0,1^{n-1}$

$$c_1 = 4 \cdot (0,1)^{1-1} = 4; c_5 = 4 \cdot (0,1)^{5-1} = 0,0004 = 4 \cdot 10^{-4}$$

$$P_5 = \sqrt{(c_1 \cdot c_5)^5} = \sqrt{(4 \cdot 4 \cdot 10^{-4})^5} = \sqrt{(4^2 \cdot 10^{-4})^5} = 0,000\ 000\ 1024$$

d.  $d_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$d_1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = 64; d_5 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 4$$

$$P_5 = \sqrt{(d_1 \cdot d_5)^5} = \sqrt{(64 \cdot 4)^5} = \sqrt{(256)^5} = 1\ 048\ 576$$

44 Halla el producto de los seis primeros términos de estas progresiones geométricas:

a.  $a_n = \{2, -6, 18, -54, \dots\}$

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

$$a_1 = 2 \quad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow r = \frac{-6}{2} = \frac{18}{-6} = -3$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

$$a_6 = 2 \cdot (-3)^5 = -486$$

$$P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{[2 \cdot (-486)]^6} = 918330048$$

b.  $b_n = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right\}$

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$b_n = b_1 \cdot r^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_6 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6\right]^6} = \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^7\right]^6} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{42}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{21} = 2^{-21}$$

c.  $c_n = \{0,2; 0,02; 0,002; 0,0002; \dots\}$

$$c_1 = 0,2 \quad r = \frac{0,02}{0,2} = \frac{0,002}{0,02} = 0,1 = 10^{-1}$$

$$c_n = c_1 \cdot r^{n-1} = 0,2 \cdot (10^{-1})^{n-1}$$

$$c_6 = 0,2 \cdot (10^{-1})^5 = 2 \cdot 10^{-6}$$

$$P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{(0,2 \cdot 2 \cdot 10^{-6})^6} = \sqrt{(4 \cdot 10^{-7})^6} = \sqrt{4^6 \cdot 10^{-42}} = 4^3 \cdot 10^{-21} = 6,4 \cdot 10^{-20}$$

- 45 De una progresión geométrica se conocen  $a_4 = -\frac{1}{2}$  y  $r = \frac{1}{2}$ . ¿Cuánto vale el producto de sus seis primeros términos?

$$a_4 = -\frac{1}{2}; r = \frac{1}{2}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{2} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow a_1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2^3}} = 2^2 = 4$$

$$a_6 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^2 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2^3}$$

$$P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{\left(4 \cdot \frac{1}{2^3}\right)^6} = \sqrt{\left(2^2 \cdot \frac{1}{2^3}\right)^6} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \sqrt{\left(\frac{1}{2^6}\right)} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

- 46 Se sabe que el tercer término de una progresión geométrica es 1,6, y el sexto, 12,8. Calcula:

a. La razón de la progresión.

$$a_3 = 1,6; a_6 = 12,8$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow 1,6 = a_1 \cdot r^2$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow 12,8 = a_1 \cdot r^5$$

Se despeja  $a_1$  de la primera ecuación:  $a_1 = \frac{1,6}{r^2}$  y se sustituye en la segunda ecuación:

$$12,8 = \frac{1,6}{r^2} \cdot r^5 = 1,6 \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{12,8}{1,6}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

b. El primer término.

$$a_1 = \frac{1,6}{r^2} = \frac{1,6}{2^2} = 0,4$$

c. El producto de los seis primeros términos.

$$a_1 = 0,4; a_6 = 12,8$$

$$P_6 = \sqrt{(a_1 \cdot a_6)^6} = \sqrt{(0,4 \cdot 12,8)^6} = (0,4 \cdot 12,8)^3 = 134,217728$$

- 47 El producto de los cinco primeros término de una progresión geométrica es 32 768. Si  $a_1 = -2$ , calcula  $a_5$ .

$$P_5 = 32\,768; a_1 = -2$$

$$P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} \Rightarrow 32\,768^2 = [(-2) \cdot a_5]^5 = (-2)^5 \cdot a_5^5$$

$$a_5^5 = \frac{32\,768^2}{(-2)^5} \Rightarrow a_5 = \sqrt[5]{\frac{32\,768^2}{(-2)^5}} = -32$$

- 48 Actividad resuelta.

- 49 De una progresión geométrica se sabe que  $a_1 - a_4 = 26$  y que  $P_4 = 729$ . Halla el valor de  $a_1$  y  $a_4$ , sabiendo que ambos son positivos.

$$a_1 - a_4 = 26; P_4 = 729$$

$$a_1 = 26 + a_4$$

$$P_4 = \sqrt{(a_1 \cdot a_4)^4} \Rightarrow 729 = (a_1 \cdot a_4)^2 = [(26 + a_4) \cdot a_4]^2 = (26a_4 + a_4^2)^2$$

$$\sqrt{729} = 26a_4 + a_4^2 \Rightarrow a_4^2 + 26a_4 - 27 = 0$$

Se resuelve la ecuación de segundo grado y  $a_4 = 1$ , como tiene que ser positivo, la solución  $-27$  no es válida.

$$a_1 - a_4 = 26 \Rightarrow a_1 = 27$$

## SOLUCIONES PÁG. 67

- 50 Dada la progresión geométrica  $a_n = \{1, 3, 9, 27, \dots\}$ , halla su término general y la suma de los diez primeros términos.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_1 = 1 \qquad r = \frac{3}{1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

$$a_{10} = 3^9 = 19\,683$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot 3 - 1}{3 - 1} = \frac{3^9 \cdot 3 - 1}{3 - 1} = \frac{3^{10} - 1}{2} = 29\,524$$

**51 Efectúa la suma  $1 + 5 + 25 + \dots + 5^6$ .**

Se averigua, en primer lugar, el número de términos de la progresión que hay que sumar:

$$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 + 5^6, \text{ son 7 términos.}$$

Para conocer el valor de r:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{5}{1} = \frac{5^2}{5} = 5$$

El término general es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 1 \cdot 5^{n-1} = 5^{n-1}$$

Se halla el valor el  $a_7$ :

$$a_7 = 1 \cdot 5^6 = 5^6$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot 5 - 1}{5 - 1} = \frac{5^6 \cdot 5 - 1}{4} = \frac{5^7 - 1}{4} = 19\,531$$

**52 Halla el término general y la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de la que se conocen  $a_1 = 4$  y  $r = 0,2$ .**

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$  sustituimos  $a_1$  y r en  $a_n$ :

$$a_n = 4 \cdot 0,2^{n-1}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

$$S_\infty = \frac{4}{1-0,2} = 5$$

53 Determina, si es posible, la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas:

$$a. a_n = \left\{ -3, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \dots \right\}$$

Se averigua el valor de r:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{-\frac{1}{3}}{-1} = \frac{1}{3}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

$$S_\infty = \frac{-3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{-3}{\frac{2}{3}} = -\frac{9}{2}$$

$$b. b_n = \{0,1; 0,4; 1,6; 6,4; \dots\}$$

Se averigua el valor de r:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{0,4}{0,1} = \frac{1,6}{0,4} = 4$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

$$S_\infty = \frac{0,1}{1-4} \quad \text{No es posible porque } r = 4 > 1.$$

$$c. c_n = \left\{ 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots \right\}$$

Se averigua el valor de r:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{10}}{1} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{10}} = 0,1$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-0,1} = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9}$$

**54** Calcula la suma de las doce primeras potencias de 4.

$$4^0, 4^1, 4^2, 4^3, \dots, 4^{10}, 4^{11}$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{4}{1} = \frac{4^2}{4} = 4$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = 1 \cdot 4^{n-1}$$

$$a_{12} = 4^{11}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$S_{12} = \frac{a_{12} \cdot 4 - 1}{4 - 1} = \frac{4^{11} \cdot 4 - 1}{3} = \frac{4^{12} - 1}{3} = 5\,592\,405$$

**55** En una progresión geométrica,  $a_1 = \frac{1}{4}$  y  $S_4 = \frac{1}{2}$ . ¿Cuánto vale la razón?

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{4}}{1-r} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (1-r) = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \cdot (1-r) = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

**56** Calcula la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón 0,7, cuyo primer término es 4.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

$$r = 0,7; a_1 = 4$$

$$S_\infty = \frac{4}{1-0,7} = \frac{4}{0,3} = \frac{40}{3}$$

57 Se sabe que en una progresión geométrica  $a_3 = 0,002$  y  $a_7 = 0,000\ 000\ 2$ .  
Calcula:

a. La razón, teniendo en cuenta que es positiva.

$$a_3 = 0,002 = a_1 \cdot r^2$$

$$a_7 = 0,000\ 000\ 2 = a_1 \cdot r^6$$

Se despeja  $a_1$  y se sustituye en la siguiente expresión:

$$a_1 = \frac{0,002}{r^2}$$

$$0,000\ 000\ 2 = \frac{0,002}{r^2} \cdot r^6 \Rightarrow r = \sqrt[4]{\frac{0,000\ 000\ 2}{0,002}} = 0,1$$

b. El primer término.

$$a_1 = \frac{0,002}{r^2} = \frac{0,002}{0,1^2} = 0,2$$

c. El noveno término.

$$a_9 = a_1 \cdot r^8 = 0,2 \cdot 0,1^8 = 0,000\ 000\ 002 = 2 \cdot 10^{-9}$$

d. La suma de los nueve primeros términos.

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$S_9 = \frac{2 \cdot 10^{-9} \cdot 0,1 - 0,2}{0,1 - 1} = \frac{2 \cdot 10^{-10} - 2 \cdot 10^{-1}}{-9 \cdot 10^{-1}} = \frac{2}{9}$$

e. La suma de los infinitos términos.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

$$S_\infty = \frac{0,2}{1-0,1} = \frac{0,2}{0,9} = \frac{2 \cdot 10^{-1}}{9 \cdot 10^{-1}} = \frac{2}{9}$$

- 58** Un grupo de amigos quiere hacer un tramo del Camino de Santiago. El primer día recorren 40 km; el segundo día, 20 km; el tercero, 10 km, y así sucesivamente. ¿Cuántos kilómetros habrán recorrido en una semana?

$$a_1 = 40 \quad a_2 = 20 \quad a_3 = 10$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{20}{40} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$a_7 = a_1 \cdot r^6 = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 5 \cdot 2^3 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$S_7 = \frac{\left(\frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 40}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{-\frac{635}{16}}{-\frac{1}{2}} = 79,375 \text{ km}$$

- 59** Cuenta la leyenda que el inventor del ajedrez enseñó a jugar a un príncipe, el cual prometió regalarle lo que pidiera. El inventor del juego solicitó un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, el doble por la tercera, y así hasta llegar a la casilla 64. Al príncipe no le pareció un precio desorbitado y aceptó, pero no tardó en darse cuenta de que la demanda era imposible de pagar, ya que no había en el reino trigo suficiente. ¿Cuántos granos de trigo había pedido en total el inventor del ajedrez?

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = 4$$

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_{64} = a_1 \cdot r^{63} = 1 \cdot 2^{63} = 2^{63}$$

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$S_{64} = \frac{a_{64} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = \frac{2^{63} \cdot 2 - 1}{1} = 2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$$

Aprox. 18,5 trillones de granos de trigo

## SOLUCIONES PÁG. 69

60 Halla la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos puros:

a.  $0,\overline{7}$

$$\begin{aligned} 0,\overline{7} &= 0,777\dots = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \dots = \\ &= \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \dots \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{7}{10} \qquad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{7}{10^2}}{\frac{7}{10}} = \frac{\frac{7}{10^3}}{\frac{7}{10^2}} = \frac{1}{10}$$

Como  $|r| = \frac{1}{10} < 1$ , se puede aplicar la expresión de la suma de los infinitos términos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

$$0,\overline{7} = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}$$

b.  $4,\overline{58}$

$$4,\overline{58} = 4 + 0,\overline{58}$$

$$\begin{aligned} 0,\overline{58} &= 0,585\ 858\dots = 0,58 + 0,005\ 8 + 0,000\ 058 + \dots = \\ &= \frac{58}{100} + \frac{58}{10000} + \frac{58}{100000} + \dots = \frac{58}{10^2} + \frac{58}{10^4} + \frac{58}{10^6} + \dots \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{58}{100} \qquad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{58}{10^4}}{\frac{58}{10^2}} = \frac{\frac{58}{10^6}}{\frac{58}{10^4}} = \frac{1}{10^2}$$

Como  $|r| = \frac{1}{10^2} < 1$ , se puede aplicar la expresión de la suma de los infinitos términos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

$$4,\overline{58} = 4 + \frac{\frac{58}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 4 + \frac{58}{99} = \frac{454}{99}$$

**c.  $12,\widehat{4}$** 

$$12,\widehat{4} = 12 + 0,\widehat{4}$$

$$0,\widehat{4} = 0,444\dots = 0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots =$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots = \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \dots$$

$$a_1 = \frac{4}{10} \quad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{4}{10^2}}{\frac{4}{10}} = \frac{\frac{4}{10^3}}{\frac{4}{10^2}} = \frac{1}{10}$$

Como  $|r| = \frac{1}{10} < 1$ , se puede aplicar la expresión de la suma de los infinitos términos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

$$12,\widehat{4} = 12 + \frac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 12 + \frac{\frac{4}{10}}{\frac{9}{10}} = 12 + \frac{4}{9} = \frac{112}{9}$$

**d.  $1,\widehat{6}$** 

$$1,\widehat{6} = 1 + 0,\widehat{6}$$

$$0,\widehat{6} = 0,666\dots = 0,6 + 0,06 + 0,006 + \dots =$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \dots$$

$$a_1 = \frac{6}{10} \quad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{6}{10^2}}{\frac{6}{10}} = \frac{\frac{6}{10^3}}{\frac{6}{10^2}} = \frac{1}{10}$$

Como  $|r| = \frac{1}{10} < 1$ , se puede aplicar la expresión de la suma de los infinitos términos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

$$1,\widehat{6} = 1 + \frac{\frac{6}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}} = 1 + \frac{6}{9} = \frac{15}{9} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{5}{3}$$

61 Establece la fracción generatriz de estos números decimales periódicos mixtos:

a.  $0,0\overline{32}$

$$\begin{aligned} 0,0\overline{32} &= 0,032\ 32\dots = 0,032 + 0,000\ 32 + 0,000\ 003\ 2 + \dots = \\ &= \frac{32}{1000} + \frac{32}{100\ 000} + \frac{32}{10\ 000\ 000} + \dots = \frac{32}{1000} + \frac{32}{1000 \cdot 10^2} + \frac{32}{1000 \cdot 10^4} + \dots \end{aligned}$$

Se observa en esta última expresión que:

$$a_1 = \frac{32}{1000} \text{ y } r = \frac{1}{10^2}$$

Como  $|r| = \frac{1}{100} < 1$ , se puede aplicar la expresión de la suma de los infinitos términos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

$$0,0\overline{32} = \frac{\frac{32}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{32}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{32}{990} = \frac{16 \cdot 2}{495 \cdot 2} = \frac{16}{495}$$

b.  $3,7\overline{8}$

$$3,7\overline{8} = 3,7 + 0,0\overline{8}$$

$$\begin{aligned} 0,0\overline{8} &= 0,088\ 8\dots = 0,08 + 0,008 + 0,000\ 8 + \dots = \\ &= \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{8}{10\ 000} + \dots = \frac{8}{100} + \frac{8}{100 \cdot 10} + \frac{8}{100 \cdot 10^2} + \dots \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{8}{100} \text{ y } r = \frac{1}{10}$$

Como  $|r| = \frac{1}{10} < 1$ , se puede aplicar la expresión de la suma de los infinitos términos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

$$3,7\overline{8} = 3,7 + \frac{\frac{8}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = 3,7 + \frac{\frac{8}{100}}{\frac{9}{10}} = 3,7 + \frac{8}{90} = \frac{37}{10} + \frac{8}{90} = \frac{341}{90}$$

**c.  $6,0\bar{5}$** 

$$6,0\bar{5} = 6,0 + 0,0\bar{5}$$

$$0,0\bar{5} = 0,0555\dots = 0,05 + 0,005 + 0,0005 + \dots =$$

$$= \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \dots = \frac{5}{100} + \frac{5}{100 \cdot 10} + \frac{5}{100 \cdot 10^2} + \dots$$

$$a_1 = \frac{5}{100} \text{ y } r = \frac{1}{10}$$

Como  $|r| = \frac{1}{10} < 1$ , se puede aplicar la expresión de la suma de los infinitos términos:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$$

$$6,0\bar{5} = 6 + \frac{\frac{5}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = 6 + \frac{\frac{5}{100}}{\frac{9}{10}} = 6 + \frac{5}{90} = \frac{60}{10} + \frac{5}{90} = \frac{545}{90} = \frac{109 \cdot 5}{18 \cdot 5} = \frac{109}{18}$$

**d.  $9,3\bar{64}$** 

$$9,3\bar{64} = 9,0 + 0,0\bar{64}$$

$$0,0\bar{64} = 0,06464\dots = 0,064 + 0,00064 + 0,000064 + \dots =$$

$$\frac{64}{1000} + \frac{64}{100000} + \frac{64}{10000000} + \dots = \frac{64}{1000} + \frac{64}{1000 \cdot 10^2} + \frac{64}{1000 \cdot 10^4} + \dots$$

$$a_1 = \frac{64}{1000} \text{ y } r = \frac{1}{10^2}$$

Como  $|r| = \frac{1}{10^2} < 1$ , se puede aplicar la expresión de la suma de los infinitos términos:

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$$

$$9,3\bar{64} = 9,3 + \frac{\frac{64}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = 9,3 + \frac{\frac{64}{1000}}{\frac{99}{100}} = 9,3 + \frac{64}{990} = \frac{93}{10} + \frac{64}{990} = \frac{9271}{990}$$

- 62** Calcula el capital final y el beneficio obtenido al invertir 15 000 € durante 8 años, al 3 % de interés simple anual y al mismo interés compuesto anual.

$$C_i = 15\,000 \text{ €}; t = 8 \text{ años}; r = 3 \%$$

Interés simple:

$$C_F = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100} \cdot t\right) = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100} \cdot 8\right) = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{6}{25}\right) = 18\,600$$

$$\text{Beneficio} = C_F - C_i = 18\,600 - 15\,000 = 3\,600 \Rightarrow \text{Beneficio} = 3\,600 \text{ €}$$

Interés compuesto:

$$C_F = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 15\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^8 = 15\,000 \cdot 1,266 = 18\,990 \square$$

$$\text{Beneficio} = C_F - C_i = 18\,990 - 15\,000 = 3\,990 \Rightarrow \text{Beneficio} = 3\,990 \text{ €}$$

- 63** ¿Cuánto dinero ha de invertir Berta durante 4 años al 5 % de interés compuesto anual para que se convierta en un capital de 9 724,05 €?

$$C_F = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow C_i = \frac{C_F}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t} = \frac{9\,724,05}{(1,05)^4} = \frac{9\,724,05}{1,2155} = 8\,000$$

Debe invertir 8 000 €.

- 64** ¿A qué rédito invirtió Sofía un capital de 5 000 € a interés compuesto anual para que en 3 años se haya convertido en 5 624,32 €?

$$C_F = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow 5\,000 = \frac{5\,624,32}{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3} \Rightarrow \left(1 + \frac{r}{100}\right)^3 = \frac{5\,624,32}{5\,000}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt[3]{\frac{5\,624,32}{5\,000}} \Rightarrow r = 100 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{5\,624,32}{5\,000}} - 1\right) \Rightarrow r = 4$$

El rédito al que invirtió Sofía era del 4 %.

- 65 En el banco A ofrecen un interés simple del 5 % anual por depositar un capital de 6 000 € durante 3 años. En el banco B, por la misma cantidad y durante el mismo tiempo, ofrecen un interés compuesto del 5 % anual. ¿Qué banco oferta mejores condiciones?

$$C_i = 6\,000 \text{ €}; t = 3 \text{ años}; r = 5 \%$$

Banco A:

$$C_F = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100} \cdot t\right) = 6\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100} \cdot 3\right) = 6\,000 \cdot \left(1 + \frac{3}{20}\right) = 6\,900$$

$$\text{Beneficio} = C_F - C_i = 6\,900 - 6\,000 = 900 \Rightarrow \text{Beneficio} = 900 \text{ €}$$

Banco B:

$$C_F = C_i \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 6\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 = 6\,000 \cdot 1,158 = 6\,945,75 \square$$

$$\text{Beneficio} = C_F - C_i = 6\,945,75 - 6\,000 = 945,75 \Rightarrow \text{Beneficio} = 945,75 \text{ €}$$

El banco B oferta mejores condiciones.

## SOLUCIONES PÁG. 71

### APRENDO A APRENDER

- 1 ¿Cuál es la diferencia entre progresión aritmética y progresión geométrica? Pon un ejemplo de cada tipo.

Los términos de una progresión aritmética se obtienen sumando al término anterior un número fijo, llamado diferencia. Sin embargo, los términos de una progresión geométrica se obtienen multiplicando al término anterior por un número fijo, llamado razón.

Respuesta abierta.

Por ejemplo, una progresión aritmética es:  $a_n = \{4, 7, 10, 13, \dots\}$ .

Y una progresión geométrica es:  $a_n = \{2, 6, 18, 54, \dots\}$ .

- 2 Halla el término general y la suma de los siete primeros términos de cada uno de los ejemplos del apartado anterior.

Respuesta abierta.

Según el ejemplo de la actividad anterior, el término general de la progresión aritmética de la actividad anterior corresponde con:  $a_n = 3n + 1$ .

$$\text{La suma de los siete primeros términos es: } S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} = \frac{(4 + 22) \cdot 7}{2} = 91$$

El término general de la progresión geométrica es:  $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ .

La suma de los siete primeros términos es:

$$S_7 = \frac{a_7 \cdot 3 - a_1}{3 - 1} = \frac{1\,458 \cdot 3 - 2}{2} = 2186$$

- 3 Pon un ejemplo de progresión geométrica con razón  $r = 0,7$ . ¿Se puede calcular la suma de todos los términos de esta progresión? En caso afirmativo, hállala.**

Respuesta abierta.

Por ejemplo:  $a_n = 2 \cdot 0,7^{n-1}$ . La suma total de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Sí se puede calcular la suma de todos sus términos pues la razón cumple:  $|r| < 1$ .

- 4 ¿Puede existir una progresión geométrica con  $a_1 = 0$ ? Razona la respuesta con tu compañero.**

Sí, la sucesión constante cuyos términos sean todos 0.

- 5 ¿Puede haber una progresión geométrica en la que todos los términos sean negativos? Razona la respuesta con tu compañero. En caso afirmativo, poned un ejemplo.**

Sí, si su primer término es negativo y su razón positiva. Por ejemplo  $a_n = -2 \cdot 3^{n-1}$

- 6 ¿Qué signo tiene la diferencia de una progresión aritmética creciente? ¿Y si es decreciente?**

Signo positivo, creciente. Signo negativo, decreciente.

- 7 ¿Cómo es una progresión aritmética con  $d = 0$ ?**

Constante.

- 8 ¿Qué condiciones debe cumplir una progresión aritmética para que todos sus términos sean positivos?**

Que su primer término y la diferencia sean positivos.

- 9 ¿Qué es una ley de recurrencia?**

Es una expresión que permite obtener un término de la sucesión a partir de los anteriores.

- 10 Construye una sucesión definida por una ley de recurrencia. Halla su sexto término.**

Respuesta abierta. Por ejemplo:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1 \text{ con } a_1 = 3$$

$$a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 7 \qquad a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 15$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 31 \qquad a_5 = 2 \cdot a_4 + 1 = 63$$

$$\Rightarrow a_6 = 2 \cdot a_5 + 1 = 127$$

- 11 ¿Puede una sucesión ser una progresión aritmética y geométrica a la vez? En caso afirmativo, ilústralo con un ejemplo.**

Sí, la sucesión  $\{1, 1, 1, \dots\}$  es una progresión aritmética con diferencia 0, y una progresión geométrica de razón 1.

- 12 ¿Cómo ha de ser la razón de una progresión geométrica para que sea alternada?**

Negativa.

- 13 ¿Cuál es la expresión del producto de los  $n$  primeros términos de una progresión geométrica de razón 1?**

$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$  Tenemos que calcular  $a_n$ :

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \Rightarrow a_n = a_1 \Rightarrow P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_1)^n} = \sqrt{(a_1^2)^n} = a_1^n$$

- 14 Prepara una presentación para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster ...**

Respuesta abierta.

## SOLUCIONES PÁG. 72 – REPASO FINAL

### SUCESIONES

- 1 Averigua si el 3 es un término de alguna de las siguientes sucesiones:**

**a.  $a_n = 3n^2$**

$$a_1 = 3 \cdot 1^2 = 3; \text{ sí lo es.}$$

**b.  $b_n = \sqrt{n^2 - 1}$**

$$\text{No, ya que: } b_n = \sqrt{n^2 - 1} \Rightarrow 3 = \sqrt{n^2 - 1} \Rightarrow 3^2 = n^2 - 1 \Rightarrow n^2 = 3^2 + 1 \Rightarrow n = \sqrt{10}$$

Y no es un número natural, por tanto no pertenece a la sucesión.

**c.  $c_n = \frac{n+1}{2}$**

$$c_5 = \frac{5+1}{2} = 3; \text{ sí lo es.}$$

**d.  $d_n = 5n - 4$**

$$\text{No, ya que: } 3 = 5n - 4 \Rightarrow 5n = 7 \Rightarrow n = \frac{7}{5}$$

Que no es un número natural, por lo que el 3 no pertenece a la sucesión.

**2 Encuentra el término general y  $a_8$  de las siguientes sucesiones:**

a.  $a_n = \left\{ 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots \right\}$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

$$a_3 = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$$

$$a_4 = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow a_8 = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$$

b.  $b_n = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{-1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{-1}{81}, \dots \right\}$

$$b_1 = \frac{1}{3} = \frac{(-1)^{1+1}}{3^1}$$

$$b_2 = \frac{-1}{9} = \frac{(-1)^{2+1}}{3^2}$$

$$b_3 = \frac{1}{27} = \frac{(-1)^{3+1}}{3^3}$$

$$b_4 = \frac{-1}{81} = \frac{(-1)^{4+1}}{3^4}$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \Rightarrow b_8 = \frac{(-1)^{8+1}}{3^8} = \frac{-1}{6561}$$

c.  $c_n = \{7, 14, 21, 28, \dots\}$

$$c_1 = 7 = 7 \cdot 1$$

$$c_2 = 14 = 7 \cdot 2$$

$$c_3 = 21 = 7 \cdot 3$$

$$c_4 = 28 = 7 \cdot 4$$

$$c_n = 7 \cdot n = 7n \Rightarrow c_8 = 7 \cdot 8 = 56$$

d.  $d_n = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{6}{5}, \frac{8}{5}, \dots \right\}$

$$d_1 = \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 1}{5}$$

$$d_2 = \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5}$$

$$d_3 = \frac{6}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5}$$

$$d_4 = \frac{8}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5}$$

$$d_n = \frac{2 \cdot n}{5} = \frac{2n}{5} \Rightarrow d_8 = \frac{2 \cdot 8}{5} = \frac{16}{5}$$

**3 Halla la ley de recurrencia de estas sucesiones:**

**a.  $a_n = \{3, 7, 15, 31, \dots\}$**

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 7 = 2 \cdot 3 + 1 = 2 \cdot a_1 + 1$$

$$a_3 = 15 = 2 \cdot 7 + 1 = 2 \cdot a_2 + 1$$

$$a_4 = 31 = 2 \cdot 15 + 1 = 2 \cdot a_3 + 1$$

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$$

**b.  $b_n = \{1, 2, 5, 13, \dots\}$**

$$b_1 = 1 = 1$$

$$b_2 = 2 = 2$$

$$b_3 = 5 = 3 \cdot 2 - 1$$

$$b_4 = 13 = 3 \cdot 5 - 2 = 3 \cdot b_3 - b_2$$

$$b_n = 3b_{n-1} - b_{n-2}$$

**4 Determina los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones y estudia su monotonía:**

**a.  $a_n = \frac{n^2}{n-5}$**

$$a_1 = \frac{1^2}{1-5} = \frac{1}{-4}$$

$$a_2 = \frac{2^2}{2-5} = \frac{4}{-3}$$

$$a_3 = \frac{3^2}{3-5} = \frac{9}{-2}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4-5} = \frac{16}{-1} = -16$$

Como cada término es siempre mayor que el siguiente, es estrictamente decreciente.

**b.  $b_n = \frac{(-2)^n}{4}$**

$$b_1 = \frac{(-2)^1}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{(-2)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$b_3 = \frac{(-2)^3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$$

$$b_4 = \frac{(-2)^4}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Cada término tiene distinto signo que el siguiente o el anterior, es alternada.

$$c. c_n = 3 + \frac{1}{n}$$

$$c_1 = 3 + \frac{1}{1} = 3 + 1 = 4$$

$$c_2 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$c_3 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$c_4 = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

Cada término es siempre mayor que el siguiente, es estrictamente decreciente.

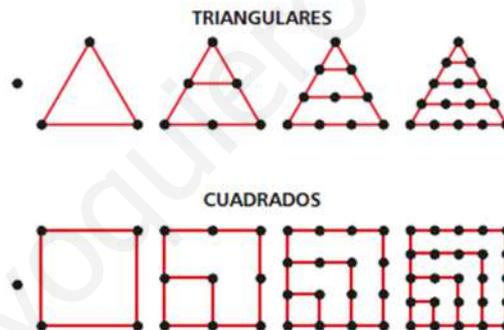
$$d. d_n = -1 + 2^{n+1}$$

$$c_1 = -1 + 2^{1+1} = -1 + 2^2 = 3 \quad c_2 = -1 + 2^{2+1} = -1 + 2^3 = 7$$

$$c_3 = -1 + 2^{3+1} = -1 + 2^4 = 15 \quad c_4 = -1 + 2^{4+1} = -1 + 2^5 = 31$$

Como cada término es siempre menor que el siguiente, es estrictamente creciente.

- 5 Pitágoras y sus discípulos descubrieron pautas numéricas en la disposición geométrica de los números y, en función de ellas, los incluyeron dentro de una u otra categoría geométrica. Así, hablaban de números triangulares, cuadrados, pentagonales... Las siguientes eran algunas construcciones geométricas pitagóricas, en las que cada figura representa un número en función de la cantidad de puntos que contiene:



Encuentra el término general de la sucesión de los números triangulares y cuadrados.

El término general de la sucesión de los números triangulares es  $a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$  y

el de los números cuadrados  $a_n = n^2$ .

## PROGRESIONES ARITMÉTICAS

- 6 Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. En caso afirmativo, halla la diferencia y el término general. Utiliza Wiris para comprobar tus resultados.

a.  $a_n = \{-7, -5, -3, -1, \dots\}$

$$a_1 = -7; a_2 = -5; a_3 = -3; a_4 = -1$$

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$$

$$-5 - (-7) = -3 - (-5) \rightarrow d = 2, \text{ sí es una progresión aritmética:}$$

$$a_n = 2n - 9$$

WIRIS CAS

Edición Operaciones Símbolos Análisis Matrices Unidades Combinatoria Geometría Griego Programación

dibujar representar resolver ecuación

dibujar3d resolver sistema

$a = \text{progresión}(-7, -5, -3, -1) \rightarrow -7, -5, -3, \dots, -9 + 2 \cdot n, \dots$  aritmético

paso(a)  $\rightarrow 2$

b.  $b_n = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \dots \right\}$

$$b_1 = \frac{3}{2}; b_2 = \frac{5}{2}; b_3 = \frac{7}{2}; b_4 = \frac{9}{2}$$

$$\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{7}{2} - \frac{5}{2} \rightarrow d = \frac{2}{2} = 1, \text{ sí es una progresión aritmética:}$$

$$a_n = n + \frac{1}{2}$$

WIRIS CAS

Edición Operaciones Símbolos Análisis Matrices Unidades Combinatoria Geometría Griego Programa

dibujar representar resolver ecuación

dibujar3d resolver sistema

$b = \text{progresión}\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right) \rightarrow \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \dots, \frac{1}{2} + n, \dots$  aritmético

paso(b)  $\rightarrow 1$

$$c. c_n = \{4, 7, 5, 8, \dots\}$$

$$c_1 = 4; c_2 = 7; c_3 = 5; c_4 = 8$$

$$c_2 - c_1 = c_3 - c_2$$

Como  $7 - 4 \neq 5 - 7$  no es una progresión aritmética.

$$d. d_n = \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{11}, \dots\}$$

$$d_1 = \sqrt{2}; d_2 = \sqrt{5}; d_3 = \sqrt{8}; d_4 = \sqrt{11}$$

$$d_2 - d_1 \neq d_3 - d_2$$

Como  $\sqrt{11} - \sqrt{2} \neq \sqrt{8} - \sqrt{5}$  no es una progresión aritmética.

## 7 Interpola cuatro medios aritméticos entre estos números:

### a. 5 y 20

Una progresión aritmética es:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$a_1 = 5; a_6 = 20$$

Se sustituyen los datos conocidos en la expresión de la progresión aritmética para calcular d:

$$20 = 5 + (6 - 1) \cdot d; d = \frac{15}{5} = 3$$

$$x_1 = a_1 + d = 5 + 3 = 8$$

$$x_2 = x_1 + d = 8 + 3 = 11$$

$$x_3 = x_2 + d = 11 + 3 = 14$$

$$x_4 = x_3 + d = 14 + 3 = 17$$

b.  $\frac{3}{4}$  y  $\frac{49}{12}$

Una progresión aritmética es:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$a_1 = \frac{3}{4}; a_6 = \frac{49}{12}$$

Se sustituyen los datos conocidos en la expresión de la progresión aritmética para calcular d:

$$\frac{49}{12} = \frac{3}{4} + (6 - 1) \cdot d; \frac{49}{12} - \frac{3}{4} = 5d; \frac{40}{12} = 5d; d = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = a_1 + d = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} \quad x_2 = x_1 + d = \frac{17}{12} + \frac{2}{3} = \frac{25}{12}$$

$$x_3 = x_2 + d = \frac{25}{12} + \frac{2}{3} = \frac{33}{12} \quad x_4 = x_3 + d = \frac{33}{12} + \frac{2}{3} = \frac{41}{12}$$

- 8 Halla el término general de una progresión aritmética en la que  $a_4 = -2$  y  $a_3 + a_{10} = 6$ .

Una progresión aritmética es:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Como  $a_4 = -2$  y  $a_3 + a_{10} = 6$ , se sustituye en la expresión de la progresión aritmética para calcular  $a_1$  y d:

$$a_4 = a_1 + (4 - 1) \cdot d; -2 = a_1 + 3 \cdot d; a_1 = -2 - 3d$$

$a_3 + a_{10} = 6$ ;  $a_3 = 6 - a_{10}$ ; Se sustituye  $a_3$  y  $a_1$  en la expresión de la progresión aritmética:

$$a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot d; 6 - a_{10} = a_1 + 2d; 6 - a_{10} = -2 - 3d + 2d; a_{10} = 8 + d$$

Por otro lado, de la expresión general de la progresión aritmética, se sabe que  $a_{10}$ :

$a_{10} = a_1 + (n - 1) \cdot d$ ; se sustituyen los datos:

$$8 + d = -2 - 3d + 9d; d = \frac{10}{5} = 2$$

$a_1 = -2 - 3d = -2 - 3 \cdot 2 = -8$ ; se sustituye  $a_1$  y d en la expresión general:

$$a_n = -8 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n - 10$$

- 9 Comprueba si los polinomios  $4x + 2$ ,  $x^2 + 4x$  y  $2x^2 + 4x - 2$  están en progresión aritmética. En caso afirmativo, halla la diferencia y el octavo término.

Una progresión aritmética es:  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$$\text{Si } a_1 = 4x + 2$$

$a_2 = x^2 + 4x$ , se sustituye en la expresión general:

$$x^2 + 4x = a_1 + (2 - 1) \cdot d = 4x + 2 + d$$

$$d = x^2 - 2$$

$$a_8 = a_1 + (8 - 1) \cdot d; a_8 = 4x + 2 + 7 \cdot (x^2 - 2); a_8 = 7x^2 + 4x - 12$$

- 10 Sea  $a_n$  la sucesión de Fibonacci y  $b_n$  la sucesión:  $b_1 = 1, b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ . ¿A qué importante número irracional se aproximan cada vez más sus términos?

La sucesión de Fibonacci es:  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$$a_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

$$b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

$$b_1 = 1; b_2 = \frac{a_2}{a_{2-1}} = \frac{1}{1} = 1; b_3 = \frac{a_3}{a_{3-1}} = \frac{2}{1} = 2; b_4 = \frac{a_4}{a_{4-1}} = \frac{3}{2}; b_5 = \frac{a_5}{a_{5-1}} = \frac{5}{3}; b_6 = \frac{a_6}{a_{6-1}} = \frac{8}{5}$$

$$b_n = 1; 1; 2; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \dots; 1,6 \dots$$

Se aproximan al número áureo:  $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618\ 033\ 9 \dots$

## SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA

- 11 Calcula la suma de los nueve primeros términos de una progresión aritmética en la que  $a_1 = 6$  y  $d = -2$ .

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d; a_9 = 6 + (9 - 1) \cdot (-2) = -10$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_9 = \frac{(6 - 10) \cdot 9}{2} = \frac{(-4) \cdot 9}{2} = -18$$

- 12** La suma de los  $k$  primeros términos de una progresión aritmética es 200. Si  $a_k = 68$  y  $a_1 = 32$ , ¿cuántos términos de la progresión se han sumado?

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \Rightarrow S_k = \frac{(32 + a_k) \cdot k}{2} \Rightarrow 200 = \frac{(32 + 68) \cdot k}{2} \Rightarrow 200 = \frac{100 \cdot k}{2}$$

$$400 = 100k \Rightarrow k = \frac{400}{100} = 4$$

- 13** Una papelería vende a 10 € el primer lote de cuadernos, a 9,50 € el segundo lote, a 9 € el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuánto habría que pagar por ocho lotes de cuadernos?

$$a_n = 10; 9,5; 9; \dots$$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d; a_2 = 10 + (2 - 1) \cdot d; 9,5 = 10 + (2 - 1) \cdot d; d = -0,5$$

$$a_8 = 10 + (8 - 1) \cdot (-0,5) = 10 + 7 \cdot (-0,5) = 10 - 3,5 = 6,5$$

$$S_8 = \frac{(a_1 + a_8) \cdot 8}{2} = \frac{(10 + 6,5) \cdot 8}{2} = \frac{132}{2} = 66$$

## PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

- 14** Comprueba si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas. En caso afirmativo, halla la razón y el término general. Comprueba tus resultados con Wiris.

a.  $a_n = \left\{ 25, 5, 1, \frac{1}{5}, \dots \right\}$

Una progresión geométrica es:  $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_1 = 25; a_2 = 5; a_3 = 1; a_4 = \frac{1}{5}$$

$$a_2 = a_1 \cdot r; 5 = 25 \cdot r; r = \frac{1}{5}$$

Se comprueba que se cumple en  $a_3$ :

$$a_3 = a_2 \cdot r = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$$

$$\text{El término general es: } a_n = 5^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-3}$$

Edición	Operaciones	Símbolos	Análisis	Matrices	Unidades	Combinatoria	Geometría	Griego	Programa		
$()$	$()$	$  $	$\frac{\square}{\square}$	$\square^\circ$	$\sqrt{\square}$	$\Sigma$	$\prod$	$[\square]$	dibujar	representar	resolver ecuación
$()$	$  $	$\square_0$	$\sqrt[n]{\square}$	$\Sigma_{\square}$	$\prod_{\square}$	$[\square]$			dibujar3d		resolver sistema

$a = \text{progresión}(25, 5, 1, \frac{1}{5}) \rightarrow 25, 5, 1, \dots, 125 \cdot \frac{1}{5}^n, \dots \text{geométrico}$   
 $\text{razón}(a) \rightarrow \frac{1}{5}$

b.  $b_n = \{1, 6, 36, 216, \dots\}$

$$b_1 = 1; b_2 = 6; b_3 = 36; b_4 = 216$$

$$b_2 = b_1 \cdot r; 6 = 1 \cdot r; r = 6$$

Se comprueba que se cumple en  $b_3$ :

$$b_3 = b_2 \cdot r = 6 \cdot 6 = 36$$

$$\text{El término general es: } b_n = 1 \cdot 6^{n-1} = 6^{n-1}$$

Edición	Operaciones	Símbolos	Análisis	Matrices	Unidades	Combinatoria	Geometría	Griego	Programa		
$()$	$()$	$  $	$\frac{\square}{\square}$	$\square^\circ$	$\sqrt{\square}$	$\Sigma$	$\prod$	$[\square]$	dibujar	representar	resolver ecuación
$()$	$  $	$\square_0$	$\sqrt[n]{\square}$	$\Sigma_{\square}$	$\prod_{\square}$	$[\square]$			dibujar3d		resolver sistema

$b = \text{progresión}(1, 6, 36, 216) \rightarrow 1, 6, 36, \dots, \frac{1}{6} \cdot 6^n, \dots \text{geométrico}$   
 $\text{razón}(b) \rightarrow 6$

c.  $c_n = \{2, 10, -50, -250, \dots\}$

$$c_1 = 2; c_2 = 10; c_3 = -50; c_4 = -250$$

$$c_2 = c_1 \cdot r; 10 = 2 \cdot r; r = 5$$

Se comprueba que se cumple en  $c_3$ :

$c_3 = c_2 \cdot r = 10 \cdot 5 = 50 \neq -50$ ; como no se cumple, no es una progresión geométrica.

Edición	Operaciones	Símbolos	Análisis	Matrices	Unidades	Combinatoria	Geometría	Griego	Programación	Formato	
$()$	$()$	$  $	$\frac{\square}{\square}$	$\square^\circ$	$\sqrt{\square}$	$\Sigma$	$\prod$	$[\square]$	dibujar	representar	resolver ecuación
$()$	$  $	$\square_0$	$\sqrt[n]{\square}$	$\Sigma_{\square}$	$\prod_{\square}$	$[\square]$			dibujar3d		resolver sistema

$c = \text{progresión}(2, 10, -50, -250) \rightarrow 2, 10, -50, \dots, -12 \cdot n^3 + 38 \cdot n^2 - 22 \cdot n - 2, \dots \text{polinómico}$   
 $\text{razón}(c) \rightarrow \text{razón}(2, 10, -50, \dots, -12 \cdot n^3 + 38 \cdot n^2 - 22 \cdot n - 2, \dots \text{polinómico})$

$$d. d_n = \{\sqrt{7}, 7, 7\sqrt{7}, 49, \dots\}$$

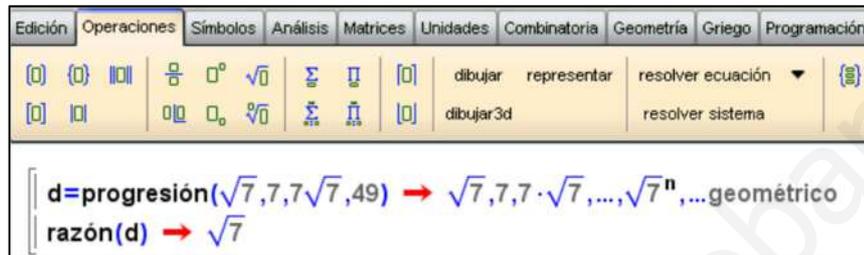
$$d_1 = \sqrt{7}; d_2 = 7; d_3 = 7\sqrt{7}; d_4 = 49$$

$$d_2 = d_1 \cdot r; 7 = \sqrt{7} \cdot r; r = \sqrt{7}$$

se comprueba que se cumple en  $d_3$ :

$$d_3 = d_2 \cdot r = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

$$\text{El término general es: } d_n = \sqrt{7} \cdot (\sqrt{7})^{n-1} = (\sqrt{7})^n$$



- 15** Halla la razón y el término general de una progresión geométrica de la que se concen  $a_1 = 32$  y  $a_6 = 1$ .

$$a_1 = 32 \text{ y } a_6 = 1$$

El término general de una progresión geométrica viene dado por la expresión:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_6 = a_1 \cdot r^{6-1}; 1 = 32 \cdot r^5; r = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 32 \cdot 2^{n-1} = 2^5 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+4}$$

- 16** Encuentra el primer término de una progresión geométrica de la que se concen  $a_5 = 0,001$  y  $r = 0,1$ .

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1}; 0,001 = a_1 \cdot (0,1)^4; a_1 = \frac{0,001}{0,0001} = 10$$

- 17** Interpola tres medios geométricos entre los números:

**a. 4 y 324**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_1 = 4$$

$$x_1 = a_1 \cdot r = 4 \cdot r$$

$$x_2 = x_1 \cdot r = 4r^2$$

$$x_3 = x_2 \cdot r = 4r^3$$

$$a_4 = x_3 \cdot r = 4r^3 \cdot r; 4r^4 = 324; r = \sqrt[4]{\frac{324}{4}} = 3$$

$$x_1 = 4 \cdot r = 4 \cdot 3 = 12$$

$$x_2 = 12 \cdot 3 = 36$$

$$x_3 = 36 \cdot 3 = 108$$

**b. 10 y  $\frac{2}{125}$**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_1 = 10$$

$$x_1 = a_1 \cdot r = 10 \cdot r$$

$$x_2 = x_1 \cdot r = 10r^2$$

$$x_3 = x_2 \cdot r = 10r^3$$

$$a_4 = x_3 \cdot r = 10r^3 \cdot r; \frac{2}{125} = 10r^4; r = \sqrt[4]{\frac{1}{625}} = \sqrt[4]{\frac{1}{5^4}} = \pm \frac{1}{5}$$

Hay dos soluciones posibles según el valor de  $r$ ,  $+\frac{1}{5}$  y  $-\frac{1}{5}$

- Con  $r$  positivo:

$$x_1 = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2$$

$$x_2 = x_1 \cdot r = \frac{2}{5}$$

$$x_3 = x_2 \cdot r = \frac{2}{25}$$

- Con  $r$  negativo:

$$x_1 = 10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -2$$

$$x_2 = x_1 \cdot r = \frac{2}{5}$$

$$x_3 = x_2 \cdot r = -\frac{2}{25}$$

- 18 Una bicicleta ha costado 250 €. Si cada año pierde un 10 % de su valor, ¿qué precio tendrá dentro de 5 años?**

Los descuentos siguen una progresión geométrica:

$$a_1 = 250$$

$$a_2 = 250 - 250 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = 225$$

$$a_3 = 225 - 225 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = 202,5$$

$$a_4 = 202,5 - 202,5 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = 182,25$$

$$a_5 = 182,25 - 182,25 \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = 164,03 \text{ €}$$

### PRODUCTO DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

- 19 Calcula el producto de los ocho primeros términos de una progresión geométrica en la que  $a_1 = \frac{1}{243}$  y  $a_8 = 2187$ .

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

$$P_8 = \sqrt{\left(\frac{1}{243} \cdot 2187\right)^8} = 6561$$

- 20 Sabiendo que en una progresión geométrica  $a_5 = 16$  y  $P_5 = 1024$ , calcula  $a_1$ .

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

$$P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} \Rightarrow P_5^2 = (a_1 \cdot a_5)^5 \Rightarrow a_1^5 = \frac{P_5^2}{a_5^5} = \frac{1024^2}{16^5} = \frac{1048576}{1048576} = 1; a_1 = 1$$

### SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

- 21 De una progresión geométrica se conocen la razón,  $r = 2$ , y la suma de los cinco primeros términos,  $S_5 = 279$ . Calcula  $a_1$ .

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}; a_5 = a_1 \cdot 2^4 = 16a_1$$

$$S_5 = \frac{a_5 \cdot 2 - a_1}{2 - 1} \Rightarrow 279 = 16a_1 \cdot 2 - a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{279}{31} = 9$$

- 22** Halla tres números en progresión geométrica sabiendo que su suma es 525, y su producto, 1 000 000.

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 = 525$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = a_1^3 \cdot r^3 = 1\,000\,000 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{1\,000\,000}{a_1^3}} = \frac{100}{a_1}$$

Tomando la ecuación de la suma:

$$a_1 + a_1 \cdot \frac{100}{a_1} + a_1 \cdot \left(\frac{100}{a_1}\right)^2 = 525 \Rightarrow a_1 + 100 + \frac{10\,000}{a_1} = 525 \Rightarrow a_1^2 + 100a_1 + 10\,000 = 525a_1$$

$$\Rightarrow a_1^2 - 425a_1 + 10\,000 = 0 \Rightarrow a_1 = \begin{cases} 25 \\ 400 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$a_1 = 25 \Rightarrow r = 4 \Rightarrow a_2 = 100 \Rightarrow a_3 = 400$$

$$a_1 = 400 \Rightarrow r = \frac{1}{4} \Rightarrow a_2 = 100 \Rightarrow a_3 = 25$$

- 23** De una progresión geométrica se sabe que  $S_\infty = 20$  y  $a_1 + a_2 = 18,2$ . Calcula  $a_1$ .

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \quad \text{si } |r| < 1$$

$$20 = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow a_1 = 20 \cdot (1-r)$$

$$a_2 = a_1 \cdot r$$

$$a_1 + a_2 = 18,2 \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot r = 18,2 \Rightarrow a_1 \cdot r = 18,2 - a_1 \Rightarrow r = \frac{18,2 - a_1}{a_1}$$

Se sustituye el valor de  $r$  en la expresión de  $a_1$  que se ha despejado anteriormente en la suma:

$$a_1 = 20 \cdot (1-r); \quad a_1 = 20 \cdot \left(1 - \frac{18,2 - a_1}{a_1}\right) \Rightarrow a_1^2 - 40a_1 + 364 = 0$$

Al resolver la ecuación de segundo grado:  $a_1 = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 364}}{2}$  se obtiene dos soluciones:

$$a_1 = 14 \text{ y } a_1 = 26$$

- 24 ¿Cuántos términos se han tomado de una progresión geométrica, sabiendo que el primer término es  $\frac{1}{8}$ ; el último término, 2, y su suma,  $\frac{31}{8}$ ?

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

$$\frac{31}{8} = \frac{2 \cdot r - \frac{1}{8}}{r - 1} \Rightarrow 31 \cdot (r - 1) = 8 \cdot \left(2 \cdot r - \frac{1}{8}\right) \Rightarrow r = 2$$

$$a_1 = \frac{1}{8} \quad a_2 = a_1 \cdot r = \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4} \quad a_3 = a_2 \cdot r = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}; 2 = \frac{1}{8} \cdot 2^{n-1}; 2 = \frac{1}{2^3} \cdot 2^{n-1}; 2 \cdot 2^3 = 2^{n-1}; 2^4 = 2^{n-1}; n = 4 + 1; n = 5$$

Se han cogido 5 términos.

## APLICACIONES

- 25 Encuentra la fracción generatriz de los siguientes números decimales periódicos:

a.  $0,\widehat{4}$

$$0,\widehat{4} = 0,444\dots = 0,4 + 0,04 + 0,004 + \dots = \frac{4}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \dots =$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \dots$$

Como  $a_1 = \frac{4}{10}$  y  $r = \frac{1}{10}$ ; puesto que  $|r| = \frac{1}{10} < 1$  se puede aplicar la expresión

de la suma de los infinitos términos:  $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

$$0,\widehat{4} = \frac{\frac{4}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{9}$$

**b.  $1,\widehat{8}$** 

$$1,\widehat{8} = 1 + 0,\widehat{8}$$

$$\begin{aligned} 0,\widehat{8} &= 0,888\dots = 0,8 + 0,08 + 0,008 + \dots = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots = \\ &= \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \dots \end{aligned}$$

Como  $a_1 = \frac{8}{10}$  y  $r = \frac{1}{10}$ ; puesto que  $|r| = \frac{1}{10} < 1$  se puede aplicar la expresión

de la suma de los infinitos términos:  $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

$$1,\widehat{8} = 1 + 0,\widehat{8} = 1 + \frac{\frac{8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{\frac{8}{10}}{\frac{9}{10}} = 1 + \frac{8}{9} = \frac{17}{9}$$

**c.  $6,\overline{25}$** 

$$6,\overline{25} = 6 + 0,\overline{25}$$

$$\begin{aligned} 0,\overline{25} &= 0,2525\dots = 0,25 + 0,0025 + 0,000025 + \dots = \\ &= \frac{25}{100} + \frac{25}{10000} + \frac{25}{1000000} + \dots = \frac{25}{100} + \frac{25}{100 \cdot 10^2} + \frac{25}{100 \cdot 10^4} + \dots \end{aligned}$$

Como  $a_1 = \frac{25}{100}$  y  $r = \frac{1}{10^2}$ ; puesto que  $|r| = \frac{1}{10^2} < 1$  se puede aplicar la

expresión de la suma de los infinitos términos:  $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

$$6,\overline{25} = 6 + 0,\overline{25} = 6 + \frac{\frac{25}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 6 + \frac{\frac{25}{100}}{\frac{99}{100}} = 6 + \frac{25}{99} = \frac{619}{99}$$

**d.  $0,\widehat{52}$** 

$$0,\widehat{52} = 0,5 + 0,\widehat{02}$$

$$\begin{aligned} 0,\widehat{02} &= 0,0222\dots = 0,02 + 0,002 + 0,0002 + \dots = \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000} + \dots = \\ &= \frac{2}{100} + \frac{2}{100 \cdot 10} + \frac{2}{100 \cdot 10^2} + \dots \end{aligned}$$

Como  $a_1 = \frac{2}{100}$  y  $r = \frac{1}{10}$ ; puesto que  $|r| = \frac{1}{10} < 1$  se puede aplicar la expresión

de la suma de los infinitos términos:  $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

$$0,5\bar{2} = 0,5 + 0,0\bar{2} = 0,5 + \frac{\frac{2}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{5}{10} + \frac{\frac{2}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{10} + \frac{2}{90} = \frac{47}{90}$$

#### e. $2,6\bar{28}$

$$2,6\bar{28} = 2,6 + 0,0\bar{28}$$

$$0,0\bar{28} = 0,028\ 282\ 8\dots = \frac{28}{1000} + \frac{28}{100000} + \frac{28}{10000000} + \dots =$$

$$= \frac{28}{1000} + \frac{28}{1000 \cdot 10^2} + \frac{28}{1000 \cdot 10^4} + \dots$$

Como  $a_1 = \frac{28}{1000}$  y  $r = \frac{1}{10^2}$ ; puesto que  $|r| = \frac{1}{10^2} < 1$  se puede aplicar la

expresión de la suma de los infinitos términos:  $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

$$2,6\bar{28} = 2,6 + 0,0\bar{28} = 2,6 + \frac{\frac{28}{1000}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{26}{10} + \frac{\frac{28}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{26}{10} + \frac{28}{990} = \frac{2602}{990} = \frac{1301}{495}$$

#### f. $4,0\bar{1}$

$$4,0\bar{1} = 4 + 0,0\bar{1}$$

$$0,0\bar{1} = 0,0111\dots = 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots = \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots =$$

$$= \frac{1}{100} + \frac{1}{100 \cdot 10} + \frac{1}{100 \cdot 10^2} + \dots$$

Como  $a_1 = \frac{1}{100}$  y  $r = \frac{1}{10}$ ; puesto que  $|r| = \frac{1}{10} < 1$  se puede aplicar la expresión

de la suma de los infinitos términos:  $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

$$4,0\bar{1} = 4 + 0,0\bar{1} = 4 + \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = 4 + \frac{\frac{1}{100}}{\frac{9}{10}} = 4 + \frac{1}{90} = \frac{361}{90}$$

- 26 Calcula el capital final obtenido al poner 10 000 € al 7 % de interés compuesto anual durante 3 y 5 años.

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t$$

Durante tres años:

$$C_F = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^3 = 12\,250,43 \Rightarrow C_F = 12\,250,43 \text{ €}$$

Durante cinco años:

$$C_F = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^5 = 14\,025,52 \Rightarrow C_F = 14\,025,52 \text{ €}$$

## EVALUACIÓN

- 1 Señala cuál de los términos generales que se presentan a continuación se corresponde con la siguiente sucesión:

$$a_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \dots\right\}$$

a.  $a_n = \frac{n}{3n+2}$

b.  $a_n = \frac{2n}{3n+2}$

c.  $a_n = \frac{n}{3n-2}$

d.  $a_n = \frac{2n}{3n-2}$

$$a_1 = \frac{1}{3 \cdot 1 - 2} = 1$$

$$a_2 = \frac{2}{3 \cdot 2 - 2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{3}{3 \cdot 3 - 2} = \frac{3}{7}$$

$$a_4 = \frac{4}{3 \cdot 4 - 2} = \frac{2}{5}$$

2. Sean las sucesiones  $a_n = \left\{18, 6, 2, \frac{2}{3}, \dots\right\}$  y  $b_n = \{-3, 3, 9, 15, \dots\}$ ; indica cuál de

las siguientes afirmaciones es cierta:

a. Las dos sucesiones son progresiones aritméticas.

b. La sucesión  $a_n$  es una progresión geométrica, y la sucesión  $b_n$ , una progresión aritmética.

c. Las dos sucesiones son progresiones geométricas.

d. La sucesión  $b_n$  es una progresión geométrica, y la sucesión  $a_n$ , una progresión aritmética.

Se determinan los términos generales de ambas progresiones:

$$a_n = \left\{18, 6, 2, \frac{2}{3}, \dots\right\}$$

$$a_1 = 18 \text{ y } r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{6}{18} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por tanto,  $a_n = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$  es una progresión geométrica.

$$b_n = \{-3, 3, 9, 15, \dots\}$$

$$b_1 = 18 \text{ y } r = b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = 3 - (-3) = 9 - 3 = 6$$

Por tanto,  $b_n = -3 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 9$  es una progresión geométrica.

- 3 De una progresión aritmética se sabe que  $d = 0,7$  y  $a_8 = 9$ . ¿Cuál es el valor de  $a_1$ ?**
- a. 2,7                      b. 8,3                      c. 3,4                      d. 4,1

Como una progresión aritmética es:  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ , se sustituyen los valores:

$$9 = a_1 + (8-1) \cdot 0,7; a_1 = 9 - 4,9 = 4,1$$

- 4 En una progresión geométrica  $a_1 = 243$  y  $r = \frac{4}{3}$ . El valor de la suma de los seis primeros términos y de la de todos sus términos es, respectivamente:**
- a.  $S_6 = 3\,367$  y  $S_\infty = -729$   
 b.  $S_6 = 3\,367$  y  $S_\infty = 729$   
 c.  $S_6 = 3\,367$  y  $S_\infty$  no se puede calcular.  
 d. No se pueden calcular ninguna de las dos sumas.

Los términos de las sumas son:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \text{ y } S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1} \quad r \neq 1;$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 243 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_6 = 243 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 = 1\,024$$

$$S_6 = \frac{1024 \cdot \frac{4}{3} - 243}{\frac{4}{3} - 1} = 3\,367$$

$S_\infty$  no se puede calcular ya que no se cumple:  $|r| < 1$

5 El beneficio obtenido al poner 5 000 € al 4 % de interés compuesto anual durante 3 años es:

a. 5 624,32 €

b. 5 600 €

c. 600 €

d. 624,32 €

$$C_F = C_I \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t \Rightarrow C_F = 5\,000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^3 = 5\,624,32 \Rightarrow C_F = 5\,624,32 \text{ €}$$

$$\text{Beneficio} = C_F - C_I \Rightarrow \text{Beneficio} = 5\,624,32 - 5\,000 = 624,32 \text{ €}$$

6 Una progresión geométrica en la que  $a_1 = 5$  y  $S_\infty = 12$  tiene por razón:

a.  $\frac{7}{12}$

b.  $\frac{12}{7}$

c.  $\frac{17}{12}$

d.  $\frac{12}{17}$

$$\text{Como } a_1 = 5 \text{ y } S_\infty = 12 = \frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{1-r} \Rightarrow 12 \cdot (1-r) = 5 \Rightarrow 12 - 12r = 5 \Rightarrow r = \frac{7}{12}$$