

POTENCIAS Y RAÍCES

Evaluación A

1. Calcula el valor de las siguientes potencias.

a) 2^{-3}

b) 3^{-4}

c) 6^{-1}

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

c) $6^{-1} = \frac{1}{6}$

b) $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$

Recuerda

Si un número a es distinto de cero:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

2. Expresa el resultado de estas operaciones como una única potencia.

a) $2^{-8} \cdot 2^{-4} : 2^3$

b) $(-3)^{-2} : (-3)^{-5} \cdot (-3)^7$

c) $(5^{-4})^2 : \frac{1}{5^6}$

d) $\frac{1}{((7^{-2})^{-4})^3}$

a) $2^{-8} \cdot 2^{-4} : 2^3 = 2^{-8+(-4)-3} = 2^{-15}$

b) $(-3)^{-2} : (-3)^{-5} \cdot (-3)^7 = (-3)^{-2-(-5)+7} = (-3)^{10} = 3^{10}$

c) $(5^{-4})^2 : \frac{1}{5^6} = \frac{5^{-8}}{5^6} = 5^{-8-6} = 5^{-14}$

d) $\frac{1}{((7^{-2})^{-4})^3} = \frac{1}{7^{24}} = 7^{-24}$

Recuerda

Propiedades de las potencias:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

3. Escribe estos números en notación científica.

a) 4497 000 000

b) 0,000 000 0853

c) 16 000 000

d) -0,000 0137

a) $4497 000 000 = 4,497 \cdot 10^9$

c) $16 000 000 = 1,6 \cdot 10^7$

b) $0,000 000 0853 = 8,53 \cdot 10^{-8}$

d) $-0,000 0137 = -1,37 \cdot 10^{-5}$

Ten en cuenta

La parte entera de un número expresado en notación científica debe estar entre 1 y 9.

4. Calcula y expresa el resultado en notación científica.

a) $3,18 \cdot 10^5 + 2,63 \cdot 10^3$

b) $1,3 \cdot 10^{-2} - 3,75 \cdot 10^{-4}$

c) $1,61 \cdot 10^{15} - 2,8 \cdot 10^{17}$

a) $3,18 \cdot 10^5 + 2,63 \cdot 10^3 = 318 \cdot 10^3 + 2,63 \cdot 10^3 = 320,63 \cdot 10^3 = 3,2063 \cdot 10^5$

b) $1,3 \cdot 10^{-2} - 3,75 \cdot 10^{-4} = 130 \cdot 10^{-4} - 3,75 \cdot 10^{-4} = 126,25 \cdot 10^{-4} = 1,2625 \cdot 10^{-2}$

c) $1,61 \cdot 10^{15} - 2,8 \cdot 10^{17} = 1,61 \cdot 10^{15} - 280 \cdot 10^{15} = -278,39 \cdot 10^{15} = -2,7839 \cdot 10^{17}$

Recuerda

Para sumar o restar números en notación científica, expresamos todos los términos en un mismo orden de magnitud, sacamos factor común la potencia de 10 y sumamos o restamos los números decimales.

5. La masa de la Tierra es $5,97 \cdot 10^{24}$ kg, y la de la Luna, $7,35 \cdot 10^{22}$ kg, aproximadamente. ¿Cuántas veces es mayor la masa de la Tierra que la de la Luna?

$$5,97 \cdot 10^{24} : 7,35 \cdot 10^{22} = 0,8122 \cdot 10^2 = 81,22$$

La masa de la Tierra es 81,22 veces mayor que la de la Luna.

Recuerda

Para multiplicar o dividir números en notación científica, operamos por un lado los números decimales y, por otro, las potencias de base 10.

6. Escribe estos radicales como potencias.

a) $\sqrt[5]{2^3}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

c) $\sqrt{7^{-3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt[7]{11^3}}$

a) $\sqrt[5]{2^3} = 2^{3/5}$

c) $\sqrt{7^{-3}} = 7^{-3/2}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{1}{5^{2/3}} = 5^{-2/3}$

d) $\frac{1}{\sqrt[7]{11^3}} = \frac{1}{11^{3/7}} = 11^{-3/7}$

Recuerda

Potencias de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

7. Calcula todas las soluciones de los siguientes radicales.

a) $\sqrt[3]{-27}$

c) $\sqrt[10]{-1}$

e) $\sqrt[6]{64}$

b) $\sqrt[4]{81}$

d) $\sqrt[4]{-81}$

f) $\sqrt[3]{125}$

a) $\sqrt[3]{-27} = -3$

d) $\sqrt[4]{-81}$ no tiene solución

b) $\sqrt[4]{81} = \pm 3$

e) $\sqrt[6]{64} = \pm 2$

c) $\sqrt[10]{-1} = -1$

f) $\sqrt[3]{125} = 5$

Ten en cuenta

$$\sqrt[n]{a} \begin{cases} n \text{ par} & \begin{cases} a > 0 \rightarrow 2 \text{ soluciones} \\ a < 0 \rightarrow 2 \text{ No tiene solución} \end{cases} \\ n \text{ impar} & \begin{cases} a > 0 \rightarrow 1 \text{ solución positiva} \\ a < 0 \rightarrow 1 \text{ solución negativa} \end{cases} \end{cases}$$

8. Ordena de menor a mayor estos radicales.

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[4]{5}$$

Reducimos a un índice común para poder ordenarlos.

m.c.m. (2, 3, 4) = 12

$$\sqrt{2} \rightarrow \sqrt[12]{2^6} = \sqrt[12]{64}$$

$$\sqrt[3]{4} \rightarrow \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{256} \rightarrow \sqrt[12]{64} < \sqrt[12]{125} < \sqrt[12]{256} \rightarrow \sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[4]{5} \rightarrow \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$$

Ten en cuenta

Para ordenar radicales, primero expresamos todos los radicales con un índice común. Después, ordenamos los radicandos.

9. Realiza las siguientes sumas y restas de radicales.

a) $7\sqrt{27} - 2\sqrt{48} - 4\sqrt{12} + \sqrt{75}$

b) $4\sqrt[3]{56} - 5\sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{875} - 2\sqrt[3]{448}$

a) $7\sqrt{27} - 2\sqrt{48} - 4\sqrt{12} + \sqrt{75} = 7\sqrt{3^3} - 2\sqrt{2^4 \cdot 3} - 4\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 5} = 7 \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot 2^2\sqrt{3} - 4 \cdot 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 21\sqrt{3} - 8\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

b) $4\sqrt[3]{56} - 5\sqrt[3]{189} + 3\sqrt[3]{875} - 2\sqrt[3]{448} = 4\sqrt[3]{2^3 \cdot 7} - 5\sqrt[3]{3^3 \cdot 7} + 3\sqrt[3]{5^3 \cdot 7} - 2\sqrt[3]{2^6 \cdot 7} = 4 \cdot 2\sqrt[3]{7} - 5 \cdot 3\sqrt[3]{7} + 3 \cdot 5\sqrt[3]{7} - 2 \cdot 2^2\sqrt[3]{7} = 8\sqrt[3]{7} - 15\sqrt[3]{7} + 15\sqrt[3]{7} - 8\sqrt[3]{7} = 0$

Ten en cuenta

Para sumar o restar radicales es necesario que tengan el mismo índice y el mismo radicando.

10. Calcula y simplifica el resultado si es posible.

a) $\sqrt[3]{18} : (\sqrt{2})^3$

b) $\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[4]{64}$

c) $(\sqrt[3]{45})^2$

a) $\sqrt[3]{18} : (\sqrt{2})^3 = \sqrt[3]{18} : \sqrt{2^3} = \sqrt[6]{18^2} : \sqrt[6]{2^9} = \sqrt[6]{\frac{18^2}{2^9}} = \sqrt[6]{\frac{324}{512}} = \sqrt[6]{\frac{81}{128}}$

b) $\sqrt[6]{32} \cdot \sqrt[4]{64} = \sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[12]{2^{10}} \cdot \sqrt[12]{2^{18}} = \sqrt[12]{2^{10} \cdot 2^{18}} = \sqrt[12]{2^{28}} = \sqrt[3]{2^7}$

c) $(\sqrt[3]{45})^2 = (\sqrt[12]{5})^2 = \sqrt[12]{5^2} = \sqrt[6]{5}$

Recuerda

Potencias de los radicales:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Evaluación B

1. Calcula el resultado de las siguientes potencias.

- a) 3^2 b) 3^{-2} c) $(-3)^{-2}$ d) -3^2 e) -3^{-2} f) $(-3)^2$
- a) $3^2 = 9$ d) $-3^2 = -9$
- b) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ e) $-3^{-2} = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$
- c) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ f) $(-3)^2 = 9$

Ten en cuenta

Al calcular una potencia, recuerda la importancia de los paréntesis.

$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$$

$$-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$$

2. Escribe cada término como producto de factores primos y simplifica el resultado.

- a) $\frac{72 \cdot 98 \cdot 27}{28 \cdot 108 \cdot 63}$ b) $\frac{216 \cdot 24 \cdot 1\,000}{80 \cdot 2\,025 \cdot 48}$
- a) $\frac{72 \cdot 98 \cdot 27}{28 \cdot 108 \cdot 63} = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 3^3}{2^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot 7} = \frac{2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2} = 1$
- b) $\frac{216 \cdot 24 \cdot 1\,000}{80 \cdot 2\,025 \cdot 48} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 2^4 \cdot 3} = \frac{2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3}{2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3} = \frac{2}{3}$

3. Expresa estos números en notación científica y ordénalos de menor a mayor.

0,00000127 0,0003891 0,00001 0,0987

$$\left. \begin{array}{l} 0,00000127 = 1,27 \cdot 10^{-6} \\ 0,0003891 = 3,891 \cdot 10^{-4} \\ 0,00001 = 10^{-5} \\ 0,0987 = 9,87 \cdot 10^{-2} \end{array} \right\} \rightarrow 1,27 \cdot 10^{-6} < 10^{-5} < 3,891 \cdot 10^{-4} < 9,87 \cdot 10^{-2}$$

Ten en cuenta

En notación científica, el número mayor es el que tiene el mayor exponente.

4. El municipio de Valsaín se encuentra situado aproximadamente a 15 km de Segovia. ¿Cuál es la distancia en milímetros? Si en coche tardamos 24 min aproximadamente en recorrer esa distancia y hacemos ese trayecto dos veces al día todos los días del año, ¿cuántos segundos emplearemos en total? Expresa los resultados en notación científica.

Pasamos 15 km a milímetros: $15 \text{ km} = 15\,000\,000 \text{ mm} = 1,5 \cdot 10^7 \text{ mm}$

La distancia entre los dos municipios es $1,5 \cdot 10^7 \text{ mm}$.

Al año se hacen $365 \cdot 2 = 730$ trayectos.

$730 \cdot 24 = 17\,520 \text{ min} = 1\,051\,200 \text{ s} = 1,0512 \cdot 10^6 \text{ s}$

Emplearemos $1,0512 \cdot 10^6 \text{ s}$ en total.

5. Calcula las siguientes operaciones con radicales.

- a) $\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{4}$ c) $\sqrt{36} : \sqrt[4]{625}$ d) $\sqrt{3 + \sqrt{169}}$
- a) $\sqrt[4]{81} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$ c) $\sqrt{36} : \sqrt[4]{625} = 6 : 5 = \frac{6}{5}$
- b) $\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$ d) $\sqrt{3 + \sqrt{169}} = \sqrt{3 + 13} = \sqrt{16} = 4$

Ten en cuenta

Antes de operar con radicales, comprueba si puedes simplificarlos.

6. Simplifica estos radicales.

a) $\sqrt[6]{15625}$

b) $\sqrt[4]{46656}$

c) $\sqrt[5]{62208}$

d) $\sqrt[3]{11664}$

a) $\sqrt[6]{15625} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

b) $\sqrt[4]{46656} = \sqrt[4]{2^6 \cdot 3^6} = 2 \cdot 3 \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^2} = 6 \sqrt{2 \cdot 3} = 6\sqrt{6}$

c) $\sqrt[5]{62208} = \sqrt[5]{2^8 \cdot 3^5} = 2 \cdot 3 \sqrt[5]{2^3} = 6\sqrt[5]{8}$

d) $\sqrt[3]{11664} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^6} = 2 \cdot 3^2 \sqrt[3]{2} = 18\sqrt[3]{2}$

Recuerda

Para extraer factores de un radical, dividimos el exponente de cada factor entre el índice. El cociente será el exponente del factor que sale, y el resto, el exponente del factor que se queda.

7. Se quiere construir un cubo metálico con un volumen de 1728 m^3 para adornar la plaza del pueblo. ¿Cuál debe ser la longitud de cada lado? ¿Qué cantidad de metal se necesitará para construirlo?

El volumen de un cubo es $V = l^3$.

Como conocemos el volumen y queremos calcular el lado, tendremos que calcular su raíz cúbica.

$$l = \sqrt[3]{1728} = 12 \text{ m}$$

La longitud de cada lado debe ser 12 m.

Para calcular la cantidad de metal, hallamos el área total del cubo.

$$A_T = 6 \cdot A_L = 6 \cdot l^2 = 6 \cdot 12^2 = 864 \text{ m}^2$$

Se necesitarán 864 m^2 de metal.

8. Opera y simplifica.

a) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$

b) $(2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 3\sqrt{5})$

a) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = 7 + 3 - 2\sqrt{21} = 10 - 2\sqrt{21}$

b) $(2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - 3\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5} = 2\sqrt{10} - 6\sqrt{25} + 4\sqrt{4} - 12\sqrt{10} = 2\sqrt{10} - 6 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 12\sqrt{10} = -22 - 10\sqrt{10}$

Ten en cuenta

Para multiplicar dos binomios, multiplicamos cada uno de los términos del primero por cada uno de los términos del segundo y reducimos términos semejantes.

9. Extrae factores del radical y simplifica las siguientes expresiones.

a) $2\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$

b) $-5\sqrt[4]{208} + \sqrt[4]{1053} - 7\sqrt[4]{13} - 2\sqrt[4]{8125}$

a) $2\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{250} - 3\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} = 2\sqrt[3]{2^4} + 4\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} - 3\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} + \sqrt[3]{2^7} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{2} + 4 \cdot 5\sqrt[3]{2} - 3 \cdot 3\sqrt[3]{2} + 2^2\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} + 20\sqrt[3]{2} - 9\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{2} = 19\sqrt[3]{2}$

b) $-5\sqrt[4]{208} + \sqrt[4]{1053} - 7\sqrt[4]{13} - 2\sqrt[4]{8125} = -5\sqrt[4]{2^4 \cdot 13} + \sqrt[4]{3^4 \cdot 13} - 7\sqrt[4]{13} - 2\sqrt[4]{5^4 \cdot 13} = -5 \cdot 2\sqrt[4]{13} + 3\sqrt[4]{13} - 7\sqrt[4]{13} - 2 \cdot 5\sqrt[4]{13} = -10\sqrt[4]{13} + 3\sqrt[4]{13} - 7\sqrt[4]{13} - 10\sqrt[4]{13} = -24\sqrt[4]{13}$

10. Escribe estas expresiones en forma de radical y calcula el resultado.

a) $3^{1/2} \cdot 2^{1/3}$

b) $5^{1/4} \cdot 6^{2/3}$

c) $2^{3/4} : 3^{2/5}$

a) $3^{1/2} \cdot 2^{1/3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{108}$

b) $5^{1/4} \cdot 6^{2/3} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[12]{5^3} \cdot \sqrt[12]{6^8} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 6^8}$

c) $2^{3/4} : 3^{2/5} = \sqrt[4]{2^3} : \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[20]{2^{15}} : \sqrt[20]{3^8} = \sqrt[20]{\frac{2^{15}}{3^8}}$

Evaluación C

1. Expresa el resultado de estas operaciones como una potencia de exponente positivo.

a) $5^{-20} \cdot 5^{18}$

b) $(3^2)^{-3} : \frac{1}{3^4}$

c) $2^{-16} : \left(\frac{1}{2}\right)^{21}$

d) $\frac{(2^{-3})^{-2}}{\frac{1}{2^2}}$

a) $5^{-20} \cdot 5^{18} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

c) $2^{-16} : \left(\frac{1}{2}\right)^{21} = 2^{-16} : 2^{-21} = 2^{-16-(-21)} = 2^5$

b) $(3^2)^{-3} : \frac{1}{3^4} = 3^{-6} : 3^{-4} = 3^{-6-(-4)} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

d) $\frac{(2^{-3})^{-2}}{\frac{1}{2^2}} = \frac{2^6}{2^{-2}} = 2^{6-(-2)} = 2^8$

2. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\frac{6^{-3} \cdot 50^2 \cdot 3^{-7}}{30^{-2} \cdot 10^5}$

b) $\frac{2^{-4} \cdot 21^3 \cdot 56^{-1}}{49^{-4} \cdot 108^6}$

a) $\frac{6^{-3} \cdot 50^2 \cdot 3^{-7}}{30^{-2} \cdot 10^5} = \frac{50^2 \cdot 30^2}{6^3 \cdot 3^7 \cdot 10^5} = \frac{(2 \cdot 5^2)^2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^2}{(2 \cdot 3)^3 \cdot 3^7 \cdot (2 \cdot 5)^5} = \frac{2^2 \cdot 5^4 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^7 \cdot 2^5 \cdot 5^5} = 2^{-4} \cdot 3^{-8} \cdot 5$

b) $\frac{2^{-4} \cdot 21^3 \cdot 56^{-1}}{49^{-4} \cdot 108^6} = \frac{49^4 \cdot 21^3}{2^4 \cdot 56 \cdot 108^6} = \frac{(7^2)^4 \cdot (3 \cdot 7)^3}{2^4 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2^2 \cdot 3^3)^6} = \frac{7^8 \cdot 3^3 \cdot 7^3}{2^4 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2^{12} \cdot 3^{18}} = \frac{7^{11} \cdot 3^3}{2^{19} \cdot 3^{18} \cdot 7} = 2^{-19} \cdot 3^{-15} \cdot 7^{10}$

3. Completa los exponentes que faltan en las siguientes igualdades.

a) $2893\,000\,000 = 2,893 \cdot 10^{\boxed{9}}$

c) $31\,040\,000 = 3,104 \cdot 10^{\boxed{7}}$

b) $-0,013\,089 = 13,089 \cdot 10^{\boxed{-2}}$

d) $0,000\,000\,0049 = 4,9 \cdot 10^{\boxed{-9}}$

4. Expresa en notación científica y opera.

a) $0,000\,621 + 0,001\,8$

c) $\frac{0,027 - 0,004\,5}{2\,500}$

b) $(0,000\,12)^3$

d) $\frac{683\,000 \cdot 8\,200}{0,000\,14}$

a) $0,000\,621 + 0,001\,8 = 6,21 \cdot 10^{-4} + 1,8 \cdot 10^{-3} = 6,21 \cdot 10^{-4} + 18 \cdot 10^{-4} = 24,21 \cdot 10^{-4} = 2,421 \cdot 10^{-3}$

b) $(0,000\,12)^3 = (1,2 \cdot 10^{-4})^3 = 1,728 \cdot 10^{-12}$

c) $\frac{0,027 - 0,004\,5}{2\,500} = \frac{2,7 \cdot 10^{-2} - 4,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^3} = \frac{27 \cdot 10^{-3} - 4,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^3} = \frac{22,5 \cdot 10^{-3}}{2,5 \cdot 10^3} = \frac{2,25 \cdot 10^{-2}}{2,5 \cdot 10^3} = 0,9 \cdot 10^{-5} = 9 \cdot 10^{-6}$

d) $\frac{683\,000 \cdot 8\,200}{0,000\,14} = \frac{6,83 \cdot 10^5 \cdot 8,2 \cdot 10^3}{1,4 \cdot 10^{-4}} = \frac{56,006 \cdot 10^8}{1,4 \cdot 10^{-4}} = \frac{5,6006 \cdot 10^9}{1,4 \cdot 10^{-4}} = 4,0004 \cdot 10^{13}$

5. Encuentra un radical que se encuentre entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{5}$.

Reducimos a índice común.

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

Por tanto, un radical que se encuentre entre ellos sería cualquiera que esté entre $\sqrt[6]{8}$ y $\sqrt[6]{25}$.

Por ejemplo, $\sqrt[6]{13}$.

6. Escribe en forma de potencia y simplifica el resultado.

- a) $\sqrt[6]{2^3}$ b) $\sqrt[4]{5^8}$ c) $\sqrt[9]{7^3}$ d) $\sqrt[8]{4^2}$
- a) $\sqrt[6]{2^3} = 2^{3/6} = 2^{1/2}$ c) $\sqrt[9]{7^3} = 7^{3/9} = 7^{1/3}$
- b) $\sqrt[4]{5^8} = 5^{8/4} = 5^2 = 25$ d) $\sqrt[8]{4^2} = 4^{2/8} = (2^2)^{2/8} = 2^{4/8} = 2^{1/2}$

7. Calcula factorizando el radicando y utilizando las propiedades de los radicales.

- a) $\sqrt[3]{27000}$ b) $\sqrt[4]{1296}$ c) $\sqrt[6]{11390625}$ d) $\sqrt{148225}$
- a) $\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
- b) $\sqrt[4]{1296} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3 = 6$
- c) $\sqrt[6]{11390625} = \sqrt[6]{3^6 \cdot 5^6} = 3 \cdot 5 = 15$
- d) $\sqrt{148225} = \sqrt{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2} = 5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$

8. Realiza las siguientes operaciones con radicales.

- a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{3^2}$ b) $\sqrt[3]{4\sqrt[5]{81}}$ c) $\sqrt{27\sqrt[3]{3^4}}$
- a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[15]{2^5 \cdot 3^6} = \sqrt[15]{2^5 \cdot 3^6}$
- b) $\sqrt[3]{4\sqrt[5]{81}} = \sqrt[3]{4\sqrt[5]{3^4}} = \sqrt[60]{3^4} = \sqrt[15]{3}$
- c) $\sqrt{27\sqrt[3]{3^4}} = \sqrt{\sqrt[3]{27^3 \cdot 3^4}} = \sqrt{\sqrt[3]{(3^3)^3 \cdot 3^4}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^9 \cdot 3^4}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^{13}}} = \sqrt[6]{3^{13}}$

9. Escribe en forma de un único radical.

- a) $3^{1/2} \cdot \sqrt[3]{3}$ b) $\sqrt[5]{2^2} : 5^{1/3}$ c) $2^{-1/4} \cdot 3^{1/3}$
- a) $3^{1/2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{3^5}$
- b) $\sqrt[5]{2^2} : 5^{1/3} = \sqrt[5]{2^2} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[15]{2^6} : \sqrt[15]{5^5} = \sqrt[15]{\frac{2^6}{5^5}}$
- c) $2^{-1/4} \cdot 3^{1/3} = \sqrt[4]{2^{-1}} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{\frac{1}{2^3}} \cdot \sqrt[12]{\frac{3^4}{1}} = \sqrt[12]{\frac{3^4}{2^3}} = \sqrt[12]{\frac{81}{8}}$

10. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Un número negativo elevado a cualquier exponente es siempre negativo.
- b) Una raíz de índice impar puede tener dos soluciones.
- c) $-4^2 = 16$
- d) $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$
- a) FALSO. Si un número negativo se eleva a un exponente par, el resultado es positivo.
- b) FALSO. Una raíz de índice impar siempre tiene una única solución.
- c) FALSO. $-4^2 = -16$. Para ser 16 debería ser $(-4)^2 = 16$.
- d) FALSO. No se pueden sumar radicales que no sean semejantes (tengan el mismo radicando).

Evaluación D

1. Ordena de menor a mayor las siguientes potencias.

$$3^{-4} \quad (-2)^{-3} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 \quad (-3)^{-2}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \\ (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \\ (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} \end{array} \right\} \rightarrow -\frac{1}{8} < \frac{1}{81} < \frac{1}{64} < \frac{1}{9} \rightarrow (-2)^{-3} < 3^{-4} < \left(\frac{1}{2}\right)^6 < (-3)^{-2}$$

2. Escribe como una única potencia y simplifica.

a) $9^3 \cdot 3^2 : 81$ b) $(81^4 : 27^4) \cdot 2^4$ c) $10^6 : (-2)^6 \cdot 5^3 : 2^9$ d) $((-2)^3)^4 : (8^{-4} : 4^{-4})$

a) $9^3 \cdot 3^2 : 81 = (3^2)^3 \cdot 3^2 : 3^4 = 3^6 \cdot 3^2 : 3^4 = 3^4$

b) $(81^4 : 27^4) \cdot 2^4 = 3^4 \cdot 2^4 = 6^4$

c) $10^6 : (-2)^6 \cdot 5^3 : 2^9 = (-5)^6 \cdot 5^3 : 2^9 = 5^6 \cdot 5^3 : 2^9 = 5^9 : 2^9 = \left(\frac{5}{2}\right)^9$

d) $((-2)^3)^4 : (8^{-4} : 4^{-4}) = (-2)^{12} : 2^{-4} = 2^{12} : 2^{-4} = 2^{16}$

3. Corrige las siguientes expresiones.

a) $3^2 \cdot 3^3 = 3^6$ b) $8^4 : 2^4 = 4^0$ c) $-2^4 = 16$ d) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[4]{14}$

a) $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$ b) $8^4 : 2^4 = 4^4$ c) $-2^4 = -16$ d) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{14}$

4. Realiza estas operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $3,45 \cdot 10^{-3} + 2,134 \cdot 10^{-4}$ c) $2,06 \cdot 10^4 \cdot 3,1 \cdot 10^{-2}$

b) $4,893 \cdot 10^8 - 2 \cdot 10^{11}$ d) $7,34 \cdot 10^5 : (-1,16 \cdot 10^8)$

a) $3,45 \cdot 10^{-3} + 2,134 \cdot 10^{-4} = 34,5 \cdot 10^{-4} + 2,134 \cdot 10^{-4} = 36,634 \cdot 10^{-4} = 3,6634 \cdot 10^{-3}$

b) $4,893 \cdot 10^8 - 2 \cdot 10^{11} = 4,893 \cdot 10^8 - 2000 \cdot 10^8 = -1995,107 \cdot 10^8 = -1,995107 \cdot 10^{11}$

c) $2,06 \cdot 10^4 \cdot 3,1 \cdot 10^{-2} = 6,386 \cdot 10^2$

d) $7,34 \cdot 10^5 : (-1,16 \cdot 10^8) = -6,3276 \cdot 10^{-3}$

5. Se estima que la población mundial es de $7,25 \cdot 10^9$ habitantes repartidos en 200 países, aproximadamente. Si se repartieran en partes iguales todos los habitantes entre los países, ¿cuántos habitantes habría por país? Expresa el resultado en notación científica y en notación decimal.

$$7,25 \cdot 10^9 : 200 = 0,03625 \cdot 10^9 = 3,625 \cdot 10^7$$

$$3,625 \cdot 10^7 = 36250000$$

Habría 36250000 habitantes en cada país.

6. Escribe en forma radical y simplifica.

a) $9^{3/8}$

b) $16^{1/4}$

c) $25^{3/4}$

d) $36^{3/2}$

a) $9^{3/8} = \sqrt[8]{9^3} = \sqrt[8]{(3^2)^3} = \sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3}$

c) $25^{3/4} = \sqrt[4]{25^3} = \sqrt[4]{(5^2)^3} = \sqrt[4]{5^6} = 5\sqrt[4]{5^2}$

b) $16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

d) $36^{3/2} = \sqrt{36^3} = \sqrt{(2^2 \cdot 3^2)^3} = \sqrt{2^6 \cdot 3^6} = 2^3 \cdot 3^3 = 216$

7. Ordena de menor a mayor los siguientes radicales.

$\sqrt[3]{5^2}$

$\sqrt[4]{5}$

$\sqrt{\sqrt[3]{5^5}}$

Reducimos a un índice común para poder ordenarlos.

m.c.m. (3, 4, 2) = 12

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt[3]{5^2} \rightarrow \sqrt[12]{5^8} \\ \sqrt[4]{5} \rightarrow \sqrt[12]{5^3} \\ \sqrt{\sqrt[3]{5^5}} = \sqrt[6]{5^5} \rightarrow \sqrt[12]{5^{10}} \end{array} \right\} \rightarrow \sqrt[12]{5^3} < \sqrt[12]{5^8} < \sqrt[12]{5^{10}} \rightarrow \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{5^2} < \sqrt{\sqrt[3]{5^5}}$$

8. Extrae factores fuera del radical y reduce a radicales semejantes.

a) $\sqrt[3]{750} - \sqrt[3]{162} - \sqrt[3]{48}$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{45}{64}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{20}{36}}$

c) $\sqrt{490} + \sqrt{250} - 6\sqrt{90} + 8\sqrt{40}$

a) $\sqrt[3]{750} - \sqrt[3]{162} - \sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2 \cdot 3 \cdot 5^3} - \sqrt[3]{2 \cdot 3^4} - \sqrt[3]{2^4 \cdot 3} = 5\sqrt[3]{2 \cdot 3} - 3\sqrt[3]{2 \cdot 3} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 3} = 5\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{6} = 0$

b) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{45}{64}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{20}{36}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3^2 \cdot 5}{2^6}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3}{4 \cdot 2^3}\sqrt{5} - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3}\sqrt{5} = \frac{3}{32}\sqrt{5} - \frac{4}{18}\sqrt{5} = -\frac{37}{288}\sqrt{5}$

c) $\sqrt{490} + \sqrt{250} - 6\sqrt{90} + 8\sqrt{40} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7^2} + \sqrt{2 \cdot 5^3} - 6\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5} + 8\sqrt{2^3 \cdot 5} = 7\sqrt{10} + 5\sqrt{10} - 6 \cdot 3\sqrt{10} + 8 \cdot 2\sqrt{10} = 7\sqrt{10} + 5\sqrt{10} - 18\sqrt{10} + 16\sqrt{10} = 10\sqrt{10}$

9. Realiza estas operaciones con radicales y expresa el resultado como una potencia.

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{10}$

b) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{14} : \sqrt[3]{7}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^8}}$

a) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{10} = \sqrt[4]{5 \cdot 8 : 10} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{2/4} = 2^{1/2}$

b) $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{14} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{2 \cdot 14} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[6]{2 \cdot 14 : 7} = \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = 2^{2/6} = 2^{1/3}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^8}} = \sqrt[4]{5^{8/3}} = 5^{8/12} = 5^{2/3}$

10. El cubo de Rubik es un rompecabezas tridimensional compuesto por pequeños cubos que forman un cubo más grande. Si en cada arista del cubo grande hay 3 cubos pequeños, ¿cuántos cubos lo forman? Si quisiéramos formar el siguiente cubo más grande, ¿cuántos cubos tendría? ¿Y el siguiente? Si un cubo grande está formado por n cubitos pequeños, ¿cuántos componen cada arista?

Lo forman $3^3 = 27$ cubos.

El siguiente tendría $4^3 = 64$ cubos, y el siguiente, $5^3 = 125$ cubos.

Si un cubo está formado por n cubitos pequeños, cada arista tendría $\sqrt[3]{n}$.