6. **Optimización**

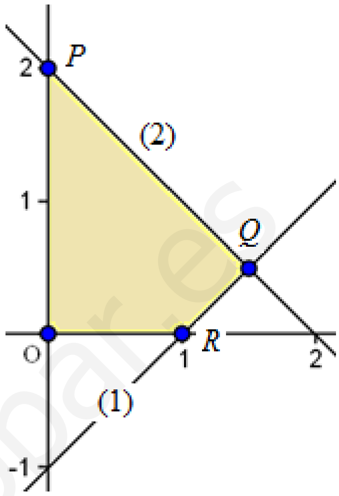
11. Halla los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 3x + y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$x - y \leq 1$; $x + y \leq 2$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Solución:

La región factible es la sombreada en la figura adjunta.
Se obtiene representando las rectas asociadas a cada inecuación y determinando el semiplano solución en cada caso.

(1) $x - y = 1$; (2) $x + y = 2$



Los vértices son:

$O(0, 0)$; $P(0, 2)$; Q: $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow Q(3/2, 1/2)$; $R(1, 0)$.

Como la región factible es cerrada, el máximo de la función objetivo $f(x, y) = 3x + y$, se da en alguno de los vértices de esa región.
Esos valores son:

En *O*, $f(0,0) = 0$. En *P*, $f(0,2) = 2$. En *Q*, $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$. En *R*, $f(1,0) = 3$.

Por tanto, el máximo, que vale 7/2, se obtiene en el punto *Q*; el mínimo, 0, en *O*.

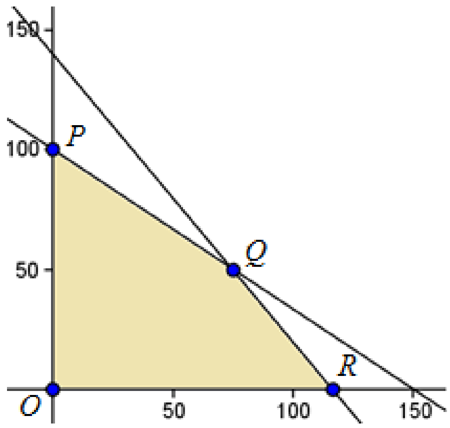
12. Halla los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = 5x + 2y + 30$, sujeta a las siguientes restricciones:

$6x + 5y \leq 700$, $2x + 3y \leq 300$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Solución:

La región factible es la sombreada en la figura adjunta.
Se obtiene representando las rectas asociadas a las inecuaciones:

$6x + 5y = 700 \rightarrow$ pasa por (0, 140) y (700/6, 0)
$2x + 3y = 300 \rightarrow$ pasa por (0, 100) y (150, 0).
$x \geq 0$, $y \geq 0 \rightarrow$ determinan el primer cuadrante.



Los vértices son:

$O(0, 0)$; $P(0, 100)$;

Q: $\begin{cases} 6x + 5y = 700 \\ 2x + 3y = 300 \end{cases} \Rightarrow Q(75, 50)$;

R (700/6, 0) = (116,7, 0).

El máximo de la función $f(x, y) = 5x + 2y + 30$ se da en alguno de los vértices de la región factible.
Los valores que toma en cada uno de esos vértices son:
En *O*, *f*(0,0) = 0. En *P*, *f*(0, 100) = 230. En *Q*, *f*(75, 50) = 505. En *R*, *f*(700/6, 0) = 613,3.
El máximo se obtiene en el punto *R*. El mínimo en *O*.

13. a) Representa gráficamente, indicando de qué tipo es la región obtenida, el conjunto de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes:

$x+2y\le 12$; $\quad 2x+y\ge 4$; $\quad x-2y\le 6$; $\quad x-y\ge 0$; $\quad x\le 8$

b) Indica la posición de los puntos *P*(1, 2) y *Q*(5, 1) en relación con la región hallada. En el caso de que el punto sea exterior, di qué desigualdades no cumple.

Solución:

a) Se representan cada una de las restricciones dadas.

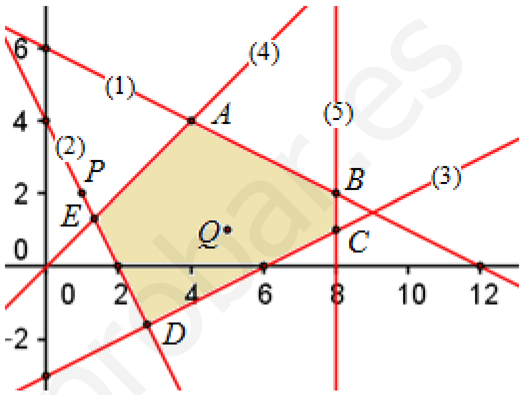
La recta (1) $x+2y=12$ corta a los ejes en (0, 6) y (12, 0). Cumplen la inecuación $x+2y\le 12$ los puntos situados a la izquierda de esa recta.

(2) $2x+y\ge 4$. Puntos (0, 4) y (2, 0); semiplano situado a la derecha.

(3) $x-2y\le 6$. Puntos situados por encima de la recta que pasa por (0, –3) y (6, 0).

(4) $x-y\ge 0$. Puntos situados a la derecha de la recta que pasa por (0, 0) y (4, 4).

(5) $x\le 8$. Semiplano a la izquierda de la recta vertical $x=8$



La región pedida es cerrada. Son todos los puntos del pentágono de vértices *A*, *B*, *C*, *D* y *E*, incluidos los lados.

b) El punto *P*(1, 2) es exterior. No cumple la restricción $x-y\ge 0$, pues $1-2=-1$.

El punto *Q*(5, 1) es interior: cumple todas las inecuaciones.

14. Para la región representada en el problema anterior, halla en qué puntos toman valores máximos y mínimos las funciones:

a) $f(x,y)=3x+2y$; $\quad$ b) $g(x,y)=2x-3y$, $\quad$ c) $h(x,y)=x+2y+20$

Solución:

Como la región de soluciones es cerrada, los máximos y mínimos de cualquier función lineal se dan en los vértices de la región factible, el pentágono *ABCDE*.

Esos puntos son los de corte de algunas de las rectas representadas.

El corte de (1) con (2), de (1) con (3), de (5) con (5)…, no es necesario conocerlo, pues son puntos ajenos a la región factible.

→ De (1) y (4) se obtiene *A*(4, 4). → De (1) y (5), *B*(8, 2). → De (3) y (5), *C*(8, 1).

→ De (2) y (3), $D\left(\frac{14}{5},-\frac{8}{5}\right)$. → De (2) y (4), $E\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$.

El valor de cada una de las funciones dadas en esos puntos es:

a) $f(x,y)=3x+2y$:

$$f(4,4)=20;\ f(8,2)=28;\ f(8,1)=26;\ f\left(\frac{14}{5},-\frac{8}{5}\right)=\frac{26}{5};\ f\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{20}{3}.$$

El máximo de $f(x,y)=3x+2y$ se da en *B*; el mínimo en *D*.

b) $g(x,y)=2x-3y$:

$g(4,4)=-4$; $g(8,2)=10$; $f(8,1)=13$; $g\left(\frac{14}{5},-\frac{8}{5}\right)=\frac{52}{5}$; $g\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{3}$.

El máximo se da en *C*; el mínimo en *A*.

c) $h(x,y)=x+2y+20$:

$h(4,4)=32$; $h(8,2)=32$; $h(8,1)=30$; $h\left(\frac{14}{5},-\frac{8}{5}\right)=\frac{98}{5}$; $h\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=24$.

El máximo de $h(x,y)=x+2y+20$ se da en *A* y *B* y, por tanto, en cualquiera de los puntos del segmento *AB*. El mínimo se da en el punto *D*.

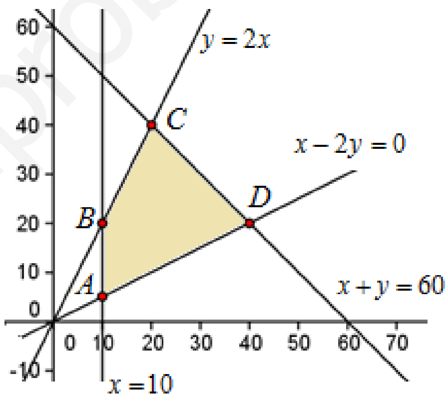
15. Halla el máximo de la función $f(x,y)=2x+3y$ restringida por las inecuaciones:

$x+y\le 60$; $x\ge 10$; $x-2y\le 0$, $y\le 2x$

<u>Solución</u>:

Representando las rectas asociadas a las inecuaciones se obtiene la región factible sombreada en la figura adjunta. Está formada por los puntos interiores del cuadrilátero *ABCD*, incluidos los lados.

Las coordenadas de los vértices, que se obtienen resolviendo los sistemas:



A: $\begin{cases} x=10 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow$ *A* = (10, 5);

B: $\begin{cases} x=10 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow$ *B* = (10, 20);

C: $\begin{cases} x+y=60 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow$ *C* = (20, 40); *D*: $\begin{cases} x+y=60 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow$ *D* = (40, 20)

Como la región de soluciones es cerrada, el máximo de $f(x,y)=2x+3y$ se da en alguno de los vértices de la región factible. El valor que toma en cada uno de esos vértices es:

En *A*, $f(10,\ 5)=35$; en *B*, $f(10,\ 20)=80$; en *C*, $f(20,\ 40)=160$; en *D*, $f(40,\ 20)=140$.

El máximo se obtiene en el punto *C*(20, 40). El valor de $f(x,y)=2x+3y$ es 160.

16. Minimiza la función $f(x,y)=45x+50y$ sujeta a las siguientes restricciones:

$x+y\le 40$; $3x+4y\ge 60$; $y\ge x+3$; $x\ge 0$; $y\ge 0$

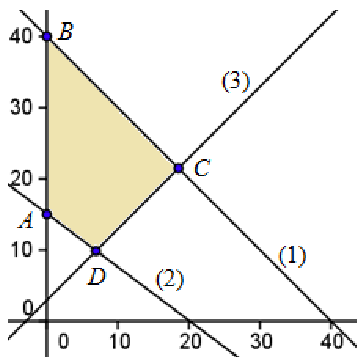
<u>Solución</u>:

Las restricciones (1) $x+y\le 40$, (2) $3x+4y\ge 60$, (3) $y\ge x+3$ y $x\ge 0$ e $y\ge 0$ generan la región factible sombreada en la siguiente figura.

Se trata de una región cerrada, cuyos vértices son:

A = (0, 15); *B* = (0, 40);

C: $\begin{cases} x+y=40 \\ y=x+3 \end{cases} \Rightarrow$ *C* = (37/2, 43/2);



$$D: \begin{cases} 3x + 4y = 60 \\ y = x + 3 \end{cases} \Rightarrow D = (48/7,\ 69/7).$$

El mínimo de $f(x, y) = 45x + 50y$ se consigue en alguno de los vértices de esa región factible. Evaluando dicha función en cada uno de ellos se tiene:

$f(0,15) = 45 \cdot 0 + 50 \cdot 15 = 750$; $f(0,40) = 45 \cdot 0 + 50 \cdot 40 = 2000$;

$$f\left(\frac{37}{2}, \frac{43}{2}\right) = \frac{37}{2} \cdot 45 + \frac{43}{2} \cdot 50 = 1907,5; \quad f\left(\frac{48}{7}, \frac{69}{7}\right) = \frac{48}{7} \cdot 45 + \frac{69}{7} \cdot 50 = 801,4$$

El mínimo vale 750; se consigue en el punto $A(0, 15)$.

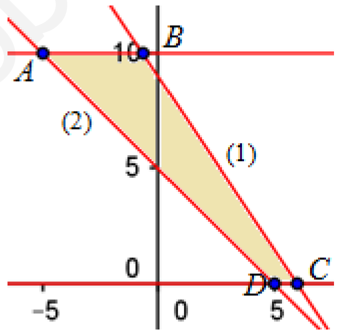
17. Representa gráficamente los puntos del recinto determinado por las siguientes desigualdades:

$3x + 2y \le 18$; $\quad x + y \ge 5$; $\quad 0 \le y \le 10$

¿Qué puntos de ese recinto hacen mínima o máxima la función $f(x, y) = 3x + 2y$?

Solución:

Las restricciones pueden transformarse para escribirlas en la forma estándar.



$3x + 2y \le 18 \to$ Semiplano a la izquierda de la recta (1), que pasa por los puntos (0, 9) y (6, 0).

$x + y \ge 5 \to$ Semiplano a la derecha de la recta (2), que pasa por (0, 5) y (5, 0).

$0 \le y \le 10 \to$ Puntos situados por encima de la recta $y = 0$ y por debajo de $y = 10$

Los vértices son:

A(–5, 10); *B*(–2/3, 10); *C*(6, 0); *D*(5, 0).

El valor $f(x, y) = 3x + 2y$ en esos puntos es:

En *A*, 5; en *B*, 18; en *C*, 18; en *D*, 15.

El mínimo se da en el punto *A*; el máximo en cualquier punto del segmento *BC*.

Problemas con enunciado

18. Un tendero dispone de una furgoneta en la que puede cargar hasta 800 kg y de 500 € para gastar. Va al mercado central a comprar fruta para su tienda. Encuentra manzanas a 0,70 €/kg y naranjas a 0,50 €/kg.

a) Venderá las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,60 €/kg. ¿Qué cantidad de manzanas y de naranjas le conviene comprar si quiere obtener el mayor beneficio posible?

b) ¿Cambiaría la solución si vende las manzanas a 0,90 €/kg y las naranjas a 0,65 €/kg?

Solución:

a) El beneficio por cada kg de manzanas es de 0,20 €; y por cada kg de naranjas, de 0,10 €. Por tanto, si compra *x* kg de manzanas e *y* de naranjas, el beneficio viene dado por la función $f(x, y) = 0,20x + 0,10y$

Las restricciones son:

$x + y \le 800 \quad \to$ la furgoneta puede cargar hasta 800 kg

$0,70x + 0,50y \le 500 \quad \to$ dispone de 500 euros.

La región factible es la sombreada en la figura adjunta.