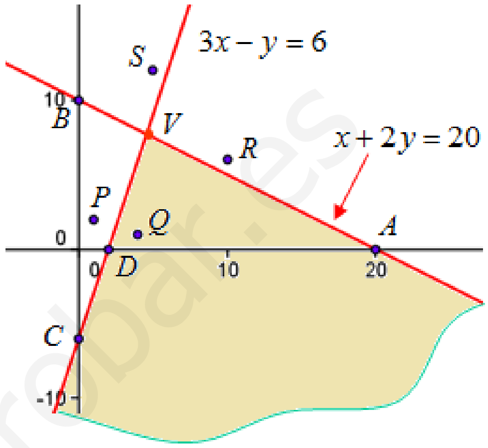
Regiones factibles

1. a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} x+2y\le 20 \\ 3x-y\ge 6 \end{cases}$$

Halla el vértice de la región de soluciones.

b) De los puntos $P(1, 2)$, $Q(4, 1)$, $R(10, 6)$ y $S(5, 12)$ indica los que no pertenezcan al conjunto e soluciones, explicando el porqué.



Solución:

a) La inecuación $x+2y\le 20$ determina el semiplano que está por debajo de la recta $x+2y=20$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son $A(20, 0)$ y $B(0, 10)$

$\rightarrow$ La inecuación $3x-y\ge 6$ determina el semiplano que está a la derecha de la recta $3x-y=6$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son $C(0, -6)$ y $D(2, 0)$

Las coordenadas del vértice se calculan resolviendo el sistema $\begin{cases} x+2y=20 \\ 3x-y=6 \end{cases}$. Su solución es $V\left(\frac{32}{7},\frac{54}{7}\right)$.

b) El único punto que cumple las dos inecuaciones es $Q(4, 1)$; los otros tres no son de la región de soluciones.

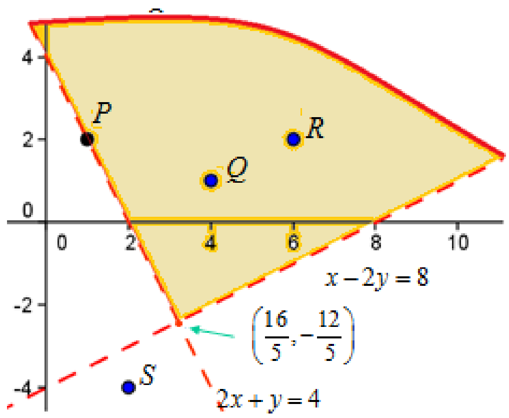
$\rightarrow$ $P(1, 2)$ no cumple la inecuación $3x-y\ge 6$.

$\rightarrow$ $R(10, 6)$ no cumple la inecuación $x+2y\le 20$.

$\rightarrow$ $S(5, 12)$ no cumple ninguna de la inecuaciones dadas.

2. a) Halla la solución gráfica del sistema $\begin{cases} 2x+y>4 \\ x-2y<8 \end{cases}$. Halla el vértice de la región de soluciones.

b) De los puntos $P(1, 2)$, $Q(4, 1)$, $R(6, 2)$ y $S(2, -4)$ indica los que no pertenezcan al conjunto de soluciones.



Solución:

a) La inecuación $2x+y>4$ tiene por solución los puntos del semiplano situado a la derecha de la recta $2x+y=4$.

La inecuación $x-2y<8$ determina los puntos del plano que están a la izquierda de la recta $x-2y=8$.

La solución del sistema es la parte coloreada en la figura adjunta. Los puntos de las semirrectas no forman parte de la solución (tampoco el vértice).

El vértice es el punto de corte de las rectas, que es la solución del sistema $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x-2y=8 \end{cases}$.

Se obtiene: $\left(\dfrac{16}{5}, -\dfrac{12}{5}\right)$.

b) Los puntos *P* y *S* no forman parte del conjunto de soluciones; *R* y *Q* sí son soluciones.

3. Representa gráficamente el conjunto de soluciones correspondiente al sistema:

$$\begin{cases} 2x+5y \geq 20 \\ 4x-10y \geq 0 \end{cases}$$

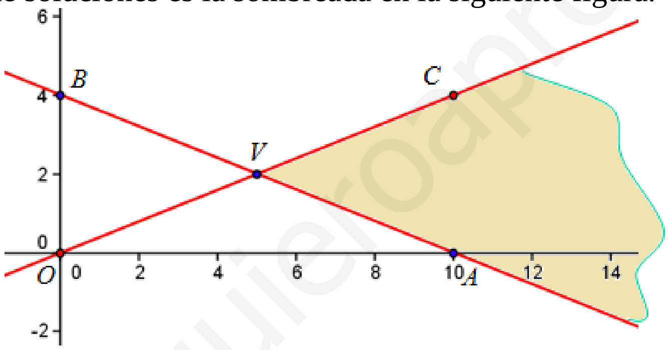
Indica el vértice de la región de soluciones.

<u>Solución</u>:

La inecuación $2x+5y \geq 20$ determina el semiplano que está por encima de la recta $2x+5y=20$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son *A*(10, 0) y *B*(0, 4)

La inecuación $4x-10y \geq 0$ determina el semiplano que está por debajo de la recta $4x-10y=0$ (incluidos los puntos de ella). Dos de sus puntos son *O*(0, 0) y *C*(10, 4).

Por tanto, la región de soluciones es la sombreada en la siguiente figura.



Las coordenadas del vértice se calculan resolviendo el sistema $\begin{cases} 2x+5y=20 \\ 4x-10y=0 \end{cases}$.

Su solución es *V*(5, 2).

4. Representa gráficamente la región de soluciones determinada por las restricciones:

$4x+2y \leq 100$; $x \geq 4$; $y \geq 18$; $y \geq 3x$

Halla sus vértices e indica en cuál de ellos la expresión $3x-2y$ es máxima.

<u>Solución</u>:

Las restricciones generan el conjunto de soluciones sombreado en la siguiente figura.

$4x+2y \leq 100 \rightarrow$ Puntos situados a la izquierda que la recta (1), que pasa por los puntos (0, 50) y (25, 0).

$x \geq 4 \rightarrow$ Semiplano a la derecha de la recta (2); $x=4$.

$y \geq 18 \rightarrow$ Semiplano por encima de la recta (3); $y=18$.

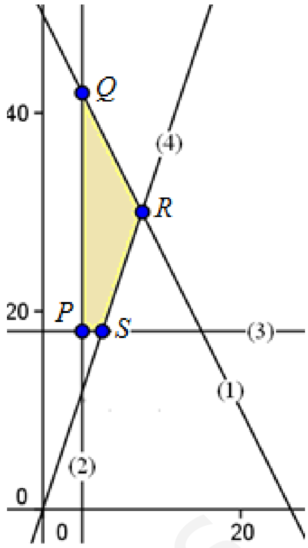
$y \geq 3x \rightarrow$ Puntos situados a la izquierda que la recta (4), que pasa por los puntos (0, 0) y (6, 18).

Los vértices son los puntos de corte de las rectas asociadas a las restricciones:

P (4, 18); Q: $\begin{cases} x = 4 \\ 4x + 2y = 100 \end{cases} \Rightarrow Q(4, 42)$;

R: $\begin{cases} 4x + 2y = 100 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow R(10, 30)$;

S: $\begin{cases} y = 18 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow S(6, 18)$



El valor de la expresión $3x - 2y$ en esos puntos es:

En P $\rightarrow$ 12 – 36 = = –24.

En Q $\rightarrow$ 12 – 84 = –72.

En R $\rightarrow$ 30 – 60 = –30.

En S $\rightarrow$ 18 – 36 = –18.

El máximo se da en S(6, 18).

5. Representa gráficamente la región de soluciones determinada por las restricciones:

$0 \le x - y + 2$; $2 + y \ge 2x$; $x + 2y + 1 \ge 0$; $2 \ge x$

Halla sus vértices e indica en cuál de ellos la expresión $2x + 4y$ es mínima.

Solución:

Las restricciones pueden transformarse para escribirlas en la forma estándar.

$0 \le x - y + 2 \Rightarrow x - y \ge -2$ $\rightarrow$ Puntos situados por debajo de la recta (1), que pasa por los puntos (0, 2) y (2, 4).

$2 + y \ge 2x \Rightarrow 2x - y \le 2$ $\rightarrow$ Semiplano a la derecha de la recta (2), que pasa por (0, –2) y (1, 0).

$x + 2y + 1 \ge 0 \Rightarrow x + 2y \ge -1$ $\rightarrow$ Semiplano por encima de la recta (3), que pasa por (–1, 0) y (0, –1/2).

$2 \ge x$ $\rightarrow$ Puntos situados a la izquierda que la recta (4): $x = 2$.

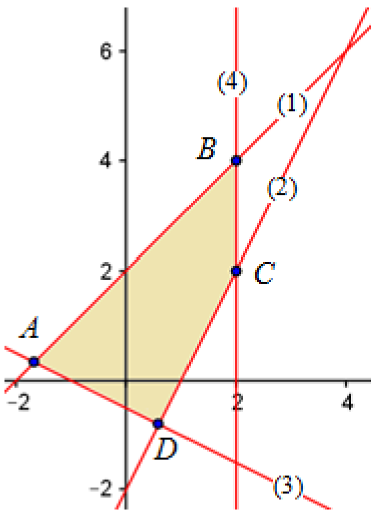
La región de soluciones es la representada en la figura adjunta.

Los vértices son:

A: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$;

B: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2, 4)$; C: $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2, 2)$;

D: $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$



El valor de la expresión $2x + 4y$ en esos puntos es:

En A $\rightarrow -\frac{10}{3} + \frac{4}{3} = -2$.

En B $\rightarrow$ 8 + 16 = 24.

En C $\rightarrow$ 4 + 8 = 12.

En D $\rightarrow \frac{6}{5} - \frac{16}{5} = -2$.

El mínimo se da en cualquier punto del segmento AD.

6. a) Representa gráficamente, indicando de qué tipo es la región obtenida, el conjunto de puntos del plano que satisfacen las inecuaciones lineales siguientes:

$x+y\geq 14$ (1); $2x+3y\geq 36$ (2); $4x+y\geq 16$ (3); $x-3y\leq 0$ (4)

b) Da un punto que no cumpla solo la inecuación (2); otro que cumpla solo las restricciones (3) y (4); y otro que no cumpla ninguna de las cuatro restricciones.

Solución:

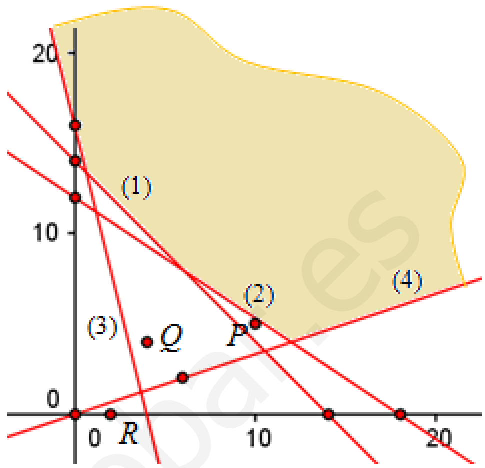
a) Representación de cada una de las inecuaciones:

(1) $x+y\geq 14$. Puntos (0, 14) y (14, 0); cumplen la inecuación los puntos situados a la derecha de la recta que determinan, incluida la recta.

(2) $2x+3y\geq 36$. Puntos (0, 12) y (18, 0); semiplano situado a la derecha.

(3) $4x+y\geq 16$. Puntos (0, 16) y (4, 0); semiplano de la derecha.

(4) $x-3y\leq 0$. La recta $x-3y=0$ pasa por los puntos (0, 0) y (6, 2).Las soluciones de $x-3y\leq 0$ son los puntos situados por encima de la recta.



La región obtenida es abierta, no acotada.

b) El punto *P*(10, 5) cumple todas las inecuaciones salvo la (2).

El punto *Q*(4, 4) cumple (3) y (4), pero no (1) y (2).

El punto *R*(2, 0) no cumple ninguna de las cuatro restricciones.

Desde el punto de vista gráfico las afirmaciones anteriores son evidentes. Para comprobarlo algebraicamente basta con sustituir en las inecuaciones.