

Una fuente llena un depósito en tres horas y otra en diez horas. Calcular el tiempo que tardarán en llenarlo, corriendo la primera sola durante una hora y después las dos juntas.

Solución

Calculamos la cantidad de depósito que llena la fuente primera sola durante una hora

Si en 3 horas llena el depósito completo (ct)

En 1 hora llenará x de la capacidad del depósito (ct)

$$x = \frac{1}{3} \text{ de la ct del depósito}$$

Por tanto, queda por llenar de la capacidad del depósito por las dos fuentes:

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ de la ct}$$

Calculamos la cantidad de depósito que llena la fuente segunda durante una hora

Si en 10 horas llena el depósito completo (ct)

En 1 hora llenará y de la capacidad del depósito (ct)

$$y = \frac{1}{10} \text{ de la ct del depósito}$$

Calculamos la cantidad de depósito que llenan las dos fuentes juntas durante una hora:

$$x + y = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{13}{30} \text{ de la ct del depósito}$$

Calculamos el tiempo que tardarán en llenarlo las dos juntas, pero solo las $\frac{2}{3}$ partes del depósito que quedan por llenar:

Si en 1 hora llenan los $\frac{13}{30}$ de la ct del depósito

En t horas llenarán los $\frac{2}{3}$ de la ct del depósito

$$\frac{13t}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{13t}{30} = \frac{2 \cdot 30}{3 \cdot 13} = \frac{20}{13} = 1,538 \text{ horas aproximadamente}$$

Dos grifos llenan un tanque en 5 y $7\frac{1}{2}$ horas. Si al abrir los dos grifos y el desagüe durante $4\frac{1}{2}$ horas solo se llenan las $\frac{3}{4}$ partes de dicho tanque. ¿Cuánto tiempo tardará el desagüe en vaciar el tanque independientemente?

Solución

Calculamos cuánta capacidad del tanque llenan los dos grifos, y el desagüe vacía en 1 hora:

Grifo 1:

Si en 5 horas llena el tanque completo (ct)

En 1 hora llenará x de la capacidad total (ct)

Luego:

$$x = \frac{1}{5} \text{ de la ct/h}$$

Grifo 2:

Si en $7,5$ horas llena el tanque completo (ct)

En 1 hora llenará y de la capacidad total (ct)

Luego:

$$y = \frac{1}{7,5} = \frac{10}{75} = \frac{5 \cdot 2}{5 \cdot 15} = \frac{2}{15} \text{ de la ct/h}$$

Desagüe

Si en t horas vacía el tanque completo (ct)

En 1 hora vaciará z de la capacidad total (ct)

$$z = \frac{1}{t} \text{ de la ct/h}$$

Calculamos cuánta capacidad del tanque llenan los tres abiertos a la vez en 1 hora: (se suman los dos grifos y se resta el desagüe)

$$x + y - z = \frac{1}{5} + \frac{2}{15} - \frac{1}{t} = \frac{3t + 2t - 15}{15t} = \frac{6t - 15}{15t} = \frac{2t - 5}{5t} \text{ de la ct/h}$$

Como el enunciado nos dice que: abiertos a la vez los tres durante 4+1/2 horas solo se llenan las 3/4 partes de dicho tanque, podemos establecer la siguiente regla de tres:

Si en 1 hora llenan los $\frac{2t-5}{5t}$ de la capacidad total (ct)

En 4,5 horas llenan los $\frac{3}{4}$ de la capacidad total (ct)

$$4,5 = 45/10 = 5 \cdot 9/5 \cdot 2 = 9/2$$

Luego:

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{2} \left(\frac{2t - 5}{5t} \right)$$

$$3 \cdot 2 \cdot 5t = 9 \cdot (2t - 5) \cdot 4$$

$$5t = 3 \cdot (2t - 5) \cdot 2$$

$$5t = 6 \cdot (2t - 5)$$

$$5t = 12t - 30$$

$$12t - 5t = 30$$

$$7t = 30$$

$$t = \frac{30}{7} \text{ de horas tarda el desagüe en vaciar el tanque}$$

Un depósito provisto de válvula de desagüe recibe agua por dos conductos. El primero arroja un litro y medio por segundo, y el segundo 75 litros por minuto. Abierto el primero, corre agua solo durante veinticinco minutos, y después, durante cuarenta minutos, ambos juntos. ¿Qué cantidad de agua tendrá el depósito en este momento, si dieciocho minutos antes empezó el desagüe, a razón de ocho litros cada tres segundos?

Solución

Operaremos con las mismas unidades: litros/segundo.

1.- Calculamos cuánta agua arroja el conducto 1 (C1) durante los primeros 25 minutos en los que está abierto solo.

Convertimos los minutos a segundos, multiplicando por 60: $25 \times 60 = 1500$ segundos:

Si en 1 segundo arroja 1,5 litros

En 1500 segundos arrojará x litros

$$x = 1500 \cdot 1,5 = 2250 \text{ l}$$

2.- Calculamos cuánta agua arroja el conducto 1 (C1) y el 2 (C2) juntos durante los 40 minutos:

Convertimos los minutos a segundos, multiplicando por 60: $40 \times 60 = 2400$ segundos:

Conducto 1

Conducto 2

Si en 1 segundo arroja 1,5 litros

Convertimos en segundos cuánto litros

En 2400 segundos arrojará y litros

arroja: Si en 60 segundo arroja 75 litros

$$y = 2400 \cdot 1,5 = 3600 \text{ l}$$

En 1 segundo arrojará z litros

$$z = \frac{75}{60} = 1,25 \text{ l/s}$$

Ahora, calculamos cuántos litros echa en 40 minutos= 2400 segundos:

Si en 1 segundo vierte 1,25 litros

En 2400 segundos verterá t litros

$$t = 2400 \cdot 1,25 = 3000 \text{ l}$$

Los litros que vierten juntos en 40 minutos son:

$$y + t = 3600 + 3000 = 6600 \text{ l}$$

3.- Calculamos cuántos litros han vertido C1 y C2 en total :

$$x + y + t = 2250 + 3600 + 3000 = 8.850 \text{ l}$$

4.- Calculamos cuántos litros expulsa el desagüe en los 18 minutos que está abierto:

Previamente, hallamos cuántos litros expulsa por segundo:

Si en 3 segundos expulsa 8 litros

En 1 segundo expulsará u litros

$$u = \frac{8}{3} \text{ l/s}$$

A continuación, obtenemos cuántos litros ha evacuado en 18 minutos.

Convertimos los 18 minutos en segundos multiplicando por 60:
 $18 \times 60 = 1080$ segundos.

En 1 segundo expulsa $\frac{8}{3}$ litros

Si en 1080 segundos expulsa v litros

$$v = \frac{8 \cdot 1080}{3} = 2.880 \text{ l}$$

Por tanto, la cantidad de agua que habrá en el depósito será:

$$x + y + t - v = 2250 + 3600 + 3000 - 2880 = \mathbf{5.970 \text{ l}}$$

Un recipiente se llena por tres caños que arrojan agua durante doce días a 20 horas por cada día y 150 litros por hora. ¿Cuántos caños se necesitarán para llenar ese mismo recipiente en diez días, abiertos durante dieciocho horas cada día y arrojando 120 litros por hora?

Solución

Calculamos para los tres caños cuántos litros arrojan en 20 horas a razón de 150 litros por hora:

Si en 1 hora vierten 150 litros

En 20 horas verterán x litros

$$x = 20 \cdot 150 = 3000 \text{ l/h}$$

Hacemos lo mismo para el segundo caso:

Si en 1 hora vierten 120 litros

En 18 horas verterán y litros

$$y = 18 \cdot 120 = 2160 \text{ l/h}$$

Ahora, planteamos la regla de tres compuesta:

3 caños-----12 días-----3000 l/d

z caños-----10 días-----2160 l/d

Analizamos la relación:

3 caños-----12 días

z caños-----10 días

Es una regla de tres inversa porque una magnitud (días) disminuye (pasa de 12 a 10), la otra magnitud (caños) aumentará. Luego,

$$\frac{3}{z} = \frac{10}{12}$$

Analizamos la relación:

3 caños-----3000 l/d

z caños-----2160 l/d

Es una regla de tres inversa porque cuando una magnitud (litros/días) disminuye (pasa de 3000 a 2160), la otra magnitud (caños) aumentará. Luego,

$$\frac{3}{z} = \frac{2160}{3000}$$

Así:

$$\frac{10}{12} \cdot \frac{2160}{3000} = \frac{3}{z}$$

$$\frac{10}{12} \cdot \frac{2160}{3000} = \frac{3}{z}$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{18 \cdot 12}{30} = \frac{3}{z}$$

$$\frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 5} = \frac{3}{z}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{z}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{z}$$

$z = 5$ caños serán necesarios

Dos grifos alimentan un depósito y lo llenan simultáneamente, en 2 horas 24 minutos. Abiertos separadamente, el primero lo llenaría en dos horas menos que el segundo. Averiguar el tiempo que tardaría cada uno de ellos en llenarlo independientemente.

Solución

Sea t el tiempo que tarda el grifo 2 en llenar el depósito.

El grifo 1 tardará dos horas menos: $t-2$.

Hallamos cuánta capacidad de depósito llenan cada uno separadamente en una hora:

Grifo 1:

Si en $t-2$ horas llena la capacidad total del depósito (ct)

En 1 hora llenará x de la capacidad total del depósito (ct)

$$x = \frac{1}{t-2}$$

Grifo 2:

Si en t horas llena la capacidad total del depósito (ct)

En 1 hora llenará y de la capacidad total del depósito (ct)

$$y = \frac{1}{t}$$

Ahora, hallamos cuánta capacidad de depósito llenan los dos juntos en 1 hora:

Grifo 1 + Grifo 2

Previamente, convertimos los 24 minutos en la fracción de hora correspondiente:

$$\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$$

Luego, el tiempo invertido por para llenar el depósito es:

$$2 + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$$

Si en $\frac{12}{5}$ de hora llenan la capacidad total del depósito (ct)

En 1 hora llenarán z de la capacidad total del depósito (ct)

Luego:

$$\frac{12z}{5} = 1$$

$$z = \frac{5}{12}$$

Por tanto, en una hora llenará los $\frac{5}{12}$ de la ct:

$$x + y = z$$

$$\frac{1}{t-2} + \frac{1}{t} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{t + (t-2)}{(t-2)t} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{2t-2}{t^2-2t} = \frac{5}{12}$$

$$12(2t-2) = 5(t^2-2t)$$

$$24t - 24 = 5t^2 - 10t$$

$$5t^2 - 10t - 24t + 24 = 0$$

$$5t^2 - 34t + 24 = 0$$

$$t = \frac{34 \pm \sqrt{1156 - 480}}{10} = \frac{34 \pm \sqrt{676}}{10} = \frac{34 \pm 26}{10}$$

$$t_1 = \frac{34 + 26}{10} = \frac{60}{10} = 6 \text{ horas tarda el grifo 2}$$

Luego el grifo 1 tardará:

$$t - 2 = 6 - 2 = 4 \text{ horas}$$

$$t_2 = \frac{34 - 26}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \text{ solución no válida}$$