

Estudia la continuidad de las funciones :

$$\text{a) } y = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{b) } \frac{5x-5}{x^2-1}$$

Para que sea continua , basta con que este definida.

a) El cociente esta definido en $\mathbb{R}$ excepto las x que anulan el denominador, que en este caso es $x = -1$

La función será continua en $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

En $x = -1$ la $f(x)$ es discontinua de segunda especie por ser sus limites laterales $\pm \infty$

b) Aquí el dominio es $\mathbb{R}$ excepto las x que hagan $x^2 - 1 = 0$, es decir, $x = \pm 1$

La $y = \frac{5x-5}{x^2-1}$ será continua en $D : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\text{En } x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x-5}{x^2-1} = \frac{-10}{0} = -\infty \quad \text{discontinua de segunda especie}$$

pues no existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\text{En } x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x-5}{x^2-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x+1} = \frac{5}{2}$$

Discontinua evitable pues existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ pero $f(1) = \frac{0}{0}$ no esta definida

Estudia razonadamente la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

$$x = 2 \left\{ \begin{array}{l} f(2) = 2(2) - 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} L1 \neq L2 ; \text{ NO EXISTE } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \\ f(x) \text{ no es continua en } x = 2 \end{array}$$

$$x = 4 \left\{ \begin{array}{l} f(4) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} (5) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} (2x - 1) = 7 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} L1 \neq L2 ; \text{ NO EXISTE } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \\ f(x) \text{ no es continua en } x = 4 \end{array}$$

En $x \in (-\infty, 2)$ $y = x^2 + 1$ es continua por ser una paraboia.

En $x \in (2, 4)$ $y = 2x - 1$ es continua por ser una recta.

En $x \in (4, \infty)$ $y = 5$ es continua por ser una función constante.

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sen } x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \end{array} \right\} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) \quad \rightarrow \quad \text{continua en } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \\ y'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{No coinciden las derivadas laterales} \\ \text{en } x = 0 \text{ luego la } f(x) \text{ no es derivable en } x = 0 \\ \text{Aunque si sea continua en } x = 0 \end{array}$$

Estudia la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{Si } x = 0 \\ \frac{2x \cdot (x-3)}{3x^2 - 9x} & \text{Si } 0 < x < 3 \\ 2/3 & \text{Si } x = 3 \end{cases}$$

Para que una función sea derivable es necesario que primero sea continua.

La función para todo x distinto de 0 y de 3 es continua por ser cociente de dos polinomios que solo se anulan en estos dos valores 0 y 3.

Estudiemos la continuidad en $x = 3$ calculando los límites laterales y $f(3)$.

$$f(3) = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x \cdot (x-3)}{3x \cdot (x-3)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = f(3)$$

La función es continua en $x = 3$. Para ver si es derivable deberemos calcular su derivada y ver si es continua en $x = 3$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(4x-6) \cdot (3x^2-9x) - (2x^2-6x) \cdot (6x-9)}{(3x^2-9x)^2} = 0 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$f'(3) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 3} f'(x) = 0 = f'(3)$ Como la $f'(x)$ si es continua en $x = 3$ esto nos dice que la $f(x)$ si es derivable en $x = 3$

Estudiemos la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$, $f(0) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot (x-3)}{3x \cdot (x-3)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \neq f(0)$$

La $f(x)$ no es continua en $x = 0$, por lo que tampoco será derivable para $x = 0$.

Estudiar la continuidad de $f(x)$ en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2x+1} & x \leq -1 \\ x^2 + 2 & x > -1 \end{cases}$$

$(-\infty, -1)$ $f(x) = \frac{x^2}{2x+1}$ Dominio: $\forall x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, \infty) \rightarrow (-\infty, -1) \subset D$
 $\rightarrow f(x)$ está definida en $(-\infty, -1) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, -1)$

$$x = -1 \begin{cases} f(-1) = \frac{(-1)^2}{2(-1)+1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2}{2x+1} = -1 \quad L1 = L2 = f(-1) \rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = -1 \rightarrow \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2 + 2 = -1 \end{cases}$$

$f(x)$ es continua en $x = -1$

$(-1, \infty)$ $f(x) = x^2 + 2$ Dominio: $\forall x \in (-\infty, \infty) \rightarrow (-1, \infty) \subset D$
 $\rightarrow f(x)$ está definida en $(-1, \infty) \rightarrow f(x)$ es continua en $(-1, \infty)$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \leq -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$(-\infty, -1)$ f. polinómica de grado 1 $\rightarrow$ f(x) continua en R

$(-1, 1)$ f. constante $\rightarrow$ f(x) continua en R

$(1, \infty)$ f. polinómica de grado 2 $\rightarrow$ f(x) continua en R

$$\text{En } x = -1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x+5) = -3 + 5 = 2 \end{cases} \quad L_1 = L_2 \rightarrow \text{existe } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

$$\text{En } x = 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 3x + 1) = 1 - 3 + 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \end{cases} \quad L_1 \neq L_2 \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow f(x) \text{ no es continua en } x = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En los 3 intervalos la $f'(x)$ es continua en R por ser 2 f. continuas y una f. polinómica de grado 1 $\rightarrow$ f(x) es derivable.

$$\text{En } x = -1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} 3 = 3 \end{cases} \quad L_1 \neq L_2 \rightarrow \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -1} f'(x)$$

$f'(x)$ no es continua $\rightarrow$ f(x) no es derivable

En $x = 1$ f(x) no es derivable por no ser continua

Estudiar las discontinuidades si existen de la f(x)

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x > 1 \\ 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x & -1 < x < 0 \\ 3x & x = -1 \\ x^2 - \frac{3}{2} & x < -1 \end{cases}$$

Los puntos conflictivos son: $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$

$$x = -1 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - \frac{3}{2} = (-1)^2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 - \frac{3}{2} = (-1)^2 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \quad l_1 = l_2$$

Los límites laterales coinciden luego como $f(-1) = -\frac{1}{2}$ la discontinuidad es evitable con solo definir el valor $-\frac{1}{2}$ para $x = -1$

$$x = 0 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}x = 0 \end{array} \right.$$

Falta un límite lateral al no existir luego hay una discontinuidad de 2º especie con salto infinito único pues $f(0) = 0$ coincide con el otro límite lateral.

$$x = 1 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2 = 1 + 2 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3 \end{array} \right.$$

Los límites laterales coinciden y además coinciden con $f(1) = 3$ luego $f(x)$ es continua en $x = 1$

Halla a y b para que la función f(x) sea continua y derivable para todo x real.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$(-\infty, 1)$ $y = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica de grado 2
 $\rightarrow$ continua en $(-\infty, 1) \subset \mathbb{R}$.

$(1, \infty)$ $y = -x^2 + ax + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$, f(x) es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica de grado 2 $\rightarrow$ continua en $(1, \infty) \subset \mathbb{R}$.

$$x = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(1) = 1^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + ax + b) = -1 + a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2) = 1 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} -1 + a + b = 1 \\ \underline{a + b = 2} \end{array} \right.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ -2x + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$(-\infty, 1)$ $f'(x) = 2x$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica de grado 1
 $\rightarrow$ continua en $(-\infty, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow f(x)$ derivable en $(-\infty, 1)$

$(1, \infty)$ $f'(x) = -2x + a \quad \forall a \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser una función polinómica de grado 1 $\rightarrow$ continua en $(1, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow f'(x)$ derivable en $(1, \infty)$

$$x = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x + a) = -2 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x) = 2 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} -2 + a = 2; \underline{a = 4} \end{array} \right.$$

$$a + b = 2; \quad 4 + b = 2; \quad \underline{b = -2}$$

Hallar los valores de a y b para que la función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^3 - 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

$(-\infty, 0)$ $y = x^2 + 3$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser un polinomio de grado 2 $\rightarrow f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$

$(0, 2)$ $y = ax + b$ es continua en $\mathbb{R} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ por ser un polinomio de grado 1 o de grado 0 $\rightarrow f(x)$ es continua en $(0, 2)$

$(2, \infty)$ $y = x^3 - 1$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser un polinomio de grado 3 $\rightarrow f(x)$ es continua en $(2, \infty)$

$$x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(0) = a \cdot 0 + b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + 3 = 3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 = l_2 \\ \mathbf{b=3} \end{array} \right. \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 = f(0) \quad \text{es continua en } x = 0$$

$$x = 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} f(2) = 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 - 1) = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} l_1 = l_2 \quad 7 = 2a + 3; 4 = 2a : \mathbf{a = 2} \\ \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7 = f(2) \text{ es continua en } x = 2 \end{array} \right.$$