

EJERCICIOS RESUELTOS

Determina el punto de la función $f(x) = x^2 + 6x + 3$ cuya recta tangente es paralela al eje OX.

Solución:

Para que sea paralela al eje OX, su pendiente m será 0, luego hemos de buscar los puntos que anulen a la función derivada $f'(x)$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow f(-3) = -6, \text{ el punto será } P(-3, -6) \text{ y la recta tangente } y + 6 = 0.$$

Halla la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x-3}$ utilizando la definición de derivada.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h-3} - \sqrt{x-3})(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})}{h(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h-3})^2 - (\sqrt{x-3})^2}{h(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-3 - x+3}{h(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-3} + \sqrt{x-3}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \end{aligned}$$

$$\text{Así pues, si } f(x) = \sqrt{x-3} \text{ es } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

Halla la ecuación de la recta tangente y de la normal a la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ en $x = 1$.

Solución:

El punto de tangencia es $(1, -1)$, pues $f(1) = -1$.

$$\text{Como } f'(x) = \frac{2(x-3) - 2x}{(x-3)^2} = \frac{-6}{(x-3)^2}$$

$$\text{La pendiente de la recta tangente } m = f'(1) = \frac{-6}{(1-3)^2} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y + 2 = -3x + 3 \Rightarrow 3x + 2y - 1 = 0$$

La recta normal tendrá pendiente $\frac{2}{3}$ y su ecuación será:

$$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y + 3 = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 3y - 5 = 0$$

Considérese la función $f(x) = kx^3 + 6x^2 - kx - 18$.

a) ¿Qué debe valer k si las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa 1 y -2 son paralelas?

b) Determinar las ecuaciones de dichas tangentes.

Solución:

a) Para que las tangentes en los puntos dados sean paralelas se debe verificar que $f'(1) = f'(-2)$

$$\text{Como } f'(x) = 3kx^2 + 12x - k \text{ entonces: } f'(1) = f'(-2) \Rightarrow 3k + 12 - k = 12k - 24 - k \text{ de donde } 36 = 9k \Rightarrow k = 4.$$

b) Ahora es $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 4x - 18$ luego $f'(x) = 12x^2 + 12x - 4$ y sustituyendo: $f'(1) = f'(-2) = 20$ y ésta será la pendiente de la recta tangente.

Los puntos de tangencia son: $P(1, f(1))$ y $Q(-2, f(-2))$, esto es: $P(1, -12)$ y $Q(-2, -18)$ luego las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$\text{En } P: y + 12 = 20(x - 1) \Rightarrow y = 20x - 32 \quad \text{En } Q: y + 18 = 20(x + 2) \Rightarrow y = 20x + 22$$

Utilizar la diferencial para obtener razonadamente un valor aproximado de $e^{0,005}$.

Solución:

Sabemos que la diferencial de una función en un punto es una buena aproximación al incremento de la misma; es decir: $f(x_0 + h) - f(x_0) < f'(x_0) dx$ o bien: $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) dx$

Tomemos $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $dx = 1,005$.

$$\text{Entonces: } f(0,005) = e^{0,005} \approx f'(0) + f'(0) dx = e^0 + e^0 \cdot 0,005 = 1 + 1 \cdot 0,005 = 1,005$$

Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x^2 + 1)^3$

b) $f(x) = \cos^3 x^3$

c) $f(x) = \log 2^x$

d) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 2}$

e) $f(x) = \sin^5 (e^x)$

f) $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$

Solución:

a) $f'(x) = 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2 + 1)^2$

b) $f'(x) = 3 \cos^2 x^3 \cdot (-\sin x^3) \cdot 3x^2 = -9 \cos^2 x^3 \cdot \sin x^3$

c) $f'(x) = \frac{1}{2^x \ln 10} \cdot 2^x \cdot \ln 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10}$

d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + 2}$

e) $f'(x) = 5 \sin^4 (e^x) \cdot \cos (e^x) \cdot e^x = 5 e^x \cdot \sin^4 (e^x) \cdot \cos (e^x)$

f) Escribiendo la función dada como una potencia de exponente fraccionario tenemos:

$$f(x) = (\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}, \text{ luego } f'(x) = \frac{1}{3} (\sin^2 x)^{\frac{1}{3}-1} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{3} (\sin^2 x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 \sin x \cos x = \frac{2 \sin x \cos x}{3 \sqrt[3]{\sin^4 x}} =$$

$$= \frac{2 \sin x \cos x}{3 \sin x \sqrt[3]{\sin x}} = \frac{2 \cos x}{3 \sqrt[3]{\sin x}}$$

En el formulario de la unidad tienes la expresión de la derivada de la función $y = \sqrt[n]{x}$ ó $y = \sqrt[n]{f}$ válidas para radicales de cualquier índice.

Debido a unas pésimas condiciones ambientales, una colonia de un millón de bacterias no comienza su reproducción hasta pasados dos meses. La función que representa la población de la colonia al variar el tiempo (en meses) viene dada por:

$$f(t) = \begin{cases} 10^6 & 0 \leq t \leq 2 \\ 10^6 \cdot e^{t-2} & t > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcula la tasa de variación media de la población en los intervalos $[0, 2]$ y $[0, 4]$.

b) Halla la tasa de variación instantánea en $t = 4$, comparándola con la última tasa de variación obtenida. Justifica los resultados obtenidos.

Solución:

a) Las tasas de variación pedidas son:

$$\text{t.v.m. } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{10^6 - 10^6}{2 - 0} = 0$$

$$\text{t.v.m. } [0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{10^6 e^2 - 10^6}{2 - 0} = 2,5 \cdot 10^5 (e^2 - 1) < 1597264,025$$

b) La tasa de variación instantánea en $t = 4$ es la derivada de f en dicho punto.

$$\text{Como } f'(x) = 10^6 \cdot e^{t-2} \Rightarrow f'(4) = 10^6 \cdot e^{4-2} \approx 7389057$$

En $[0, 2]$ no hay incremento de la población luego es lógico que la tasa de variación sea cero en dicho intervalo. En $[0, 4]$ la función es exponencial de base $e > 1$ así pues no debe sorprender su crecimiento. La diferencia entre la tasa de variación en $[0, 4]$ y la tasa instantánea en $t = 4$ se debe, precisamente, a que esta última se considera en el extremo superior del intervalo.

Se quiere vaciar un depósito de agua.

Sea $Q(t) = 200(900 + t^2 - 60t)$ la función que describe el número de litros que quedan en el depósito al cabo de t minutos de haber comenzado a vaciarlo.

a) ¿Cuántos litros de agua tiene inicialmente el depósito?, ¿cuánto tiempo tardará en vaciarse?, ¿cuál es la función que describe el número de litros que han salido al cabo de t minutos de haber comenzado a vaciarlo?

b) Calcula la función derivada de la función Q y su valor en $t = 10$ y $t = 20$ minutos. Relaciona los resultados obtenidos con la rapidez con la que se vacía el depósito.

Solución:

a) Inicialmente es cuando $t = 0$, luego hay $Q(0) = 180\,000$ litros.

El depósito estará vacío cuando $Q(t) = 0$, es decir, cuando $900 + t^2 - 60t = 0$ y esto sucede a los $t = 30$ minutos.

La función que describe el número de litros que han salido será:

$$S(x) = 180\,000 - Q(t) = 12\,000t - 200t^2 \text{ en el intervalo } [0, 30].$$

b) $Q'(t) = 200(2t - 60)$ es la función que proporciona la rapidez con la que se vacía el depósito. En $t = 20$ y $t = 40$ es:

$$Q'(10) = 200(20 - 60) = -8\,000$$

$$Q'(20) = 200(40 - 60) = -4\,000$$

lo cual indica que la velocidad de vaciado disminuye con el tiempo.