

1.3.2. Sistemas de Ecuaciones Logarítmicas

Problema 82 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} 3 \log x + 2 \log y = 12 \\ \log \frac{x}{y} = -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 3 \log x + 2 \log y = 12 \\ \log \frac{x}{y} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \log x + 2 \log y = 12 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 3u + 2v = 12 \\ u - v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u + 2v = 12 \\ 2u - 2v = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = 2 \\ \log y = v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = \log 10^2 \\ \log y = \log 10^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 1000 \end{cases}$$

Problema 83 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} 2 \log x + \log y = 4 \\ \log \frac{x}{y} = -1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2 \log x + \log y = 4 \\ \log \frac{x}{y} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \log x + \log y = 4 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 2u + v = 4 \\ u - v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = 1 \\ \log y = v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = \log 10^1 \\ \log y = \log 10^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 100 \end{cases}$$

Problema 84 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} = 1 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} = 1 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \log x - 2 \log y = 1 \\ 2 \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 3u - 2v = 1 \\ 2u + v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u - 2v = 1 \\ 4u + 2v = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{5}{7} \\ v = \frac{4}{7} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = \frac{5}{7} \\ \log y = v = \frac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10^{\frac{5}{7}} \\ y = 10^{\frac{4}{7}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5,179474679 \\ y = 3,72759372 \end{cases}$$

Problema 85 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^4}{y} = 1 \\ \log(x \cdot y^2) = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log \frac{x^4}{y} = 1 \\ \log(x \cdot y^2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \log x - \log y = 1 \\ \log x + 2 \log y = 2 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 4u - v = 1 \\ u + 2v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4u - v = 1 \\ -4u - 8v = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{4}{9} \\ v = \frac{7}{9} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = \frac{4}{9} \\ \log y = v = \frac{7}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10^{\frac{4}{9}} \\ y = 10^{\frac{7}{9}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2,782559402 \\ y = 5,994842503 \end{cases}$$

Problema 86 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} &= 1 \\ \log(x^2y) &= 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} &= 1 \\ \log(x^2y) &= 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 3 \log x - 2 \log y &= 1 \\ 2 \log x + \log y &= 2 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 3u - 2v &= 1 \\ 2u + v &= 2 \end{cases} \implies \begin{cases} 3u - 2v &= 6 \\ 4u + 7v &= 4 \end{cases} \implies \begin{cases} u &= \frac{9}{7} \\ v &= \frac{4}{7} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = \frac{9}{7} \\ \log y = v = \frac{4}{7} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 10^{\frac{9}{7}} \\ y = 10^{\frac{4}{7}} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 5,179474679 \\ y = 2,71755372 \end{cases}$$

Problema 87 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} &= 2 \\ \log(x^2y) &= 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log \frac{x^3}{y^2} &= 2 \\ \log(x^2y) &= 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 3 \log x - 2 \log y &= 2 \\ 2 \log x + \log y &= 3 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 3u - 2v &= 2 \\ 2u + v &= 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 3u - 2v &= 2 \\ 4u + 2v &= 6 \end{cases} \implies \begin{cases} u &= \frac{8}{7} \\ v &= \frac{5}{7} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = \frac{8}{7} \\ \log y = v = \frac{5}{7} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 10^{\frac{8}{7}} \\ y = 10^{\frac{5}{7}} \end{cases} \implies \begin{cases} x = 13,89495494 \\ y = 5,179474679 \end{cases}$$

Problema 88 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(x \cdot y) &= 3 \\ \log \frac{x}{y} &= 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log(x \cdot y) = 3 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u - v = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = 2 \\ \log y = v = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 10^2 = 100 \\ y = 10 \end{cases}$$

Problema 89 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log x - \log y^2 = 3 \\ \log(x^2 \cdot y) = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log x - \log y^2 = 3 \\ \log(x^2 \cdot y) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \log x - 2 \log y = 3 \\ 2 \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u - 2v = 3 \\ 2u + v = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} u = 1 \\ v = -1 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = 1 \\ \log y = v = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 10^1 = 10 \\ y = 10^{-1} = 0,1 \end{cases}$$

Problema 90 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x}{y^2} = 1 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log \frac{x}{y^2} = 1 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} \log x - 2 \log y = 1 \\ 2 \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u - 2v = 1 \\ 2u + v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = 1 \\ \log y = v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 1 \end{cases}$$

Problema 91 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log \frac{x}{y^2} = 3 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log \frac{x}{y^2} = 3 \\ \log(x^2 y) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x - 2 \log y = 3 \\ 2 \log x + \log y = 2 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variables $\log x = u$ y $\log y = v$ el sistema quedará de la siguiente forma:

$$\begin{cases} u - 2v = 3 \\ 2u + v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \frac{7}{5} \\ v = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variables nos quedaría:

$$\begin{cases} \log x = u = \frac{7}{5} \\ \log y = v = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10^{7/5} = 25,11886431 \\ y = 10^{-4/5} = 0,1584893192 \end{cases}$$

Problema 92

$$\begin{cases} \log(xy^2) = 2 \\ \log\left(\frac{x^2}{y}\right) = 3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 2 \\ 2 \log x - \log y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 2 \\ 2u - v = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u = \log x = 8/5 \Rightarrow x = 39,81 \\ v = \log y = 1/5 \Rightarrow y = 1,5849 \end{cases}$$

Problema 93

$$\begin{cases} \log(x^2y) = 3 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2\log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u + v = 3 \\ u - v = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log x = 5/3 \Rightarrow x = 46,41589 \\ v = \log y = -1/3 \Rightarrow y = 0,464159 \end{cases}$$

Problema 94

$$\begin{cases} 2\log(xy) = 3 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 5 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2\log x + 2\log y = 3 \\ \log x - 2\log y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u + 2v = 3 \\ u - 2v = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log x = 8/3 \Rightarrow x = 464,1588 \\ v = \log y = -7/6 \Rightarrow y = 0,068129 \end{cases}$$

Problema 95

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - \log y = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2\log x - \log y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 3 \\ 2u - v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ v = \log y = 2 \Rightarrow y = 100 \end{cases}$$

Problema 96

$$\begin{cases} \log(x^3y^2) = 8 \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 3\log x + 2\log y = 8 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3u + 2v = 8 \\ u - v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \log x = 2 \Rightarrow x = 100 \\ v = \log y = 1 \Rightarrow y = 10 \end{cases}$$

Problema 97

$$\begin{cases} \log x + 2 \log y = 3 \\ -\log x + \log y = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log x + 2 \log y = 3 \\ -\log x + \log y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + 2v = 3 \\ -u + v = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u = \log x = 1 \Rightarrow x = 10 \\ v = \log y = 1 \Rightarrow y = 10 \end{cases}$$

Problema 98 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 4 \\ \log\left(\frac{x^3}{y^2}\right) = 1 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 4 \\ \log\left(\frac{x^3}{y^2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \log x + 2 \log y = 4 \\ 3 \log x - 2 \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u + 2v = 4 \\ 3u - 2v = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \log x = 1 \\ v = \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases}$$

Problema 99 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 4 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 4 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \log x + 2 \log y = 4 \\ \log x - 2 \log y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u + 2v = 4 \\ u - 2v = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = 2 = \log x \\ v = 0 = \log y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 1 \end{cases}$$

Problema 100 Resolver el sistema de ecuaciones logarítmicas:

$$\begin{cases} \log(xy)^2 = 8 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 4 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \log(xy)^2 = 8 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\log x + 2\log y = 8 \\ \log x - 2\log y = 4 \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} 2u + 2v = 8 \\ u - 2v = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = 4 = \log x \Rightarrow x = 10000 \\ v = 0 = \log y \Rightarrow y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Problema 101 Unos problemas para ejercitarse:

1.

$$\begin{cases} 2\log x - 5\log y = -1 \\ 3\log x + 2\log y = 8 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 10$

2.

$$\begin{cases} 4\log x - 3\log y = -1 \\ \log(x \cdot y) = 5 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 1000$

3.

$$\begin{cases} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log \frac{x^3}{y^2} = 4 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 10$

4.

$$\begin{cases} \log(x^2 \cdot y) = 2 \\ \log \frac{x}{y} = 1 \end{cases}$$

Sol: $x = 10$; $y = 1$

5.

$$\begin{cases} \log x^2 - 3\log y = -1 \\ \log(x \cdot y^2) = 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 10$; $y = 10$

6.

$$\begin{cases} \log x^2 - 3 \log y &= 2 \\ \log\left(\frac{x}{y^2}\right) &= 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 10^{-5}$; $y = 10^{-4}$

7.

$$\begin{cases} \log x - \log y &= 7 \\ \log x + \log y &= 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 10^5$; $y = 10^{-2}$

8.

$$\begin{cases} x - y &= 15 \\ \log x + \log y &= 2 \end{cases}$$

Sol: $x = -5$; $y = -20$ o bien $x = 20$; $y = 5$

9.

$$\begin{cases} \log x + 3 \log y &= 5 \\ \log \frac{x^2}{y} &= 3 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 10$

10.

$$\begin{cases} 2 \log x^2 - \log y^2 &= 4 \\ 2 \log x + \log y^2 &= 2 \end{cases}$$

Sol: $x = 100$; $y = 1$