

Sistemas de ecuaciones logarítmicas

Para resolver los sistemas de ecuaciones logarítmicas, actuaremos de la misma forma que hemos hecho con las ecuaciones logarítmicas.

Ejemplo Caso I

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

Solución: $x=100$ e $y=10$ (si), $x=10$ e $y=100$ (si)

- En este caso aplicaremos la propiedad del producto de un logaritmo en la segunda ecuación.

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ \log(xy) = 3 \end{cases}$$

- Aplicamos la definición de logaritmo

$$\begin{cases} x + y = 110 \\ xy = 10^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 110 \\ xy = 1000 \end{cases}$$

- Resolvemos el sistema de ecuaciones, en este caso escogeremos el método de sustitución

$$\begin{cases} x = 110 - y \\ xy = 1000 \end{cases} \rightarrow (110 - y)y = 1000 \rightarrow y^2 - 110y + 1000 = 0$$

- Resolvemos la ecuación de segundo grado

$$y = \frac{110 \pm \sqrt{110^2 - 4 \cdot 1000}}{2} = \frac{110 \pm 90}{2} = \frac{100}{10}$$

$$\text{Si } y = 100 \rightarrow x + y = 110 \rightarrow x = 10$$

$$\text{Si } y = 10 \rightarrow x + y = 110 \rightarrow x = 100$$

$$\text{Soluciones } \begin{cases} x = 100 \\ y = 10 \end{cases}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 5 \\ 3\log x + \log y = 2 \end{cases}$$

Solución: $x=10$ e $y=\frac{1}{10}$

- En este caso resolveremos el sistema mediante el método de reducción

$$\begin{aligned} 3 \cdot \begin{cases} 2\log x - 3\log y = 5 \\ 3\log x + \log y = 2 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 6\log x - 9\log y = 15 \\ -6\log x - 2\log y = -4 \end{cases} \rightarrow -11\log y = 11 \rightarrow \log y = -1 \\ (-2) \cdot \begin{cases} 2\log x - 3\log y = 5 \\ 3\log x + \log y = 2 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 6\log x - 9\log y = 15 \\ -6\log x - 2\log y = -4 \end{cases} \rightarrow -11\log y = 11 \rightarrow \log y = -1 \end{aligned}$$

- Aplicamos la definición de logaritmo

$$\log y = -1 \rightarrow y = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$\text{Si } y = \frac{1}{10} \rightarrow 2\log x - 3\log \frac{1}{10} = 5 \rightarrow 2\log x - 3(-1) = 5 \rightarrow 2\log x = 2 \rightarrow \log x = 1 \rightarrow x = 10$$

Solución: $x=10$ e $y=\frac{1}{10}$ (Las solución es correcta)

Ejercicios Propuestos

a) $\begin{cases} y - 4x = 0 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases}$

Solución: $x=50$ e $y=200$ (si), $x=-50$ e $y=-200$ (no)

b) $\begin{cases} x - 2y = 9 \\ \log_3 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$

Solución: $x=27$ e $y=9$

c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$

Solución: $x=5$ e $y=2$ (si); $x=-2$ e $y=-5$ (no)

d) $\begin{cases} -3x + y = 70 \\ \log y - \log x^2 = 0 \end{cases}$

Solución: $x=10$ e $y=100$ (si), $x=-7$ e $y=49$ (si)

e) $\begin{cases} 5^{x+y} = 5^{11} \\ \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \end{cases}$

Solución: $x=7$ e $y=4$

f) $\begin{cases} x + y = 12 \\ \log_2 x - \log_2 y^2 = -4 \end{cases}$

Solución: $x=4$ e $y=8$ (si), $x=36$ e $y=-24$ (si)

g) $\begin{cases} x + y = 30 \\ \log_3 x - \log_3 y = 2 \end{cases}$

Solución: $x=27$ e $y=3$

h) $\begin{cases} \log_2(x-y) = 2 \\ \log_2 x - \log_2 y = 1 \end{cases}$

Solución: $x=8$ e $y=4$

i) $\begin{cases} \log_x(y-72) = 2 \\ \log_y(x+6) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Solución: $x=3$ e $y=81$ (si)

j) $\begin{cases} \frac{\log x}{\log y} = \frac{1}{2} \\ \log x^2 + \log y = 4 \end{cases}$

Solución: $x=10$ e $y=100$ (si)