TRIÁNGULOS.

T1. En un triángulo isósceles de 12 cm de base y 10 cm de altura se inscribe un rectángulo, de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales. ¿Qué dimensiones tendrá el rectángulo de área máxima?

T2. De todos los triángulos de 10 cm de hipotenusa, ¿cuál es el que mayor área tiene y cuánto mide ésta?

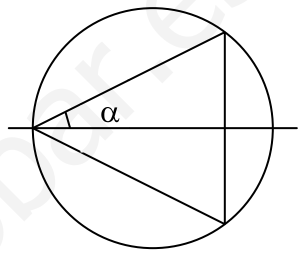
T3. De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10, halla las dimensiones de aquel cuya área sea máxima.

T4. Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?

T5. Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 cm y la altura relativa a es lado de 5 cm. Encuentra un punto sobre la altura de modo que la suma de distancias a los tres vértices sea mínima.

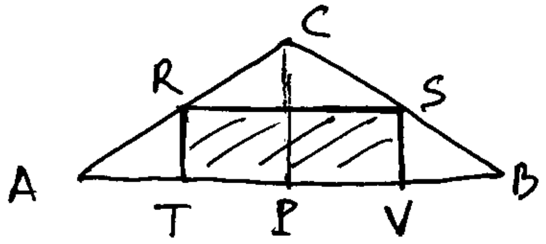
T6. Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es 1, halla el mayor valor de 2a+b.

T7. Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia de radio R. Suponiendo el ángulo α en el vértice, comprendido entre 0 y $\pi/2$, tal como se indica en la figura. ¿Cuál es el triángulo de perímetro mínimo?

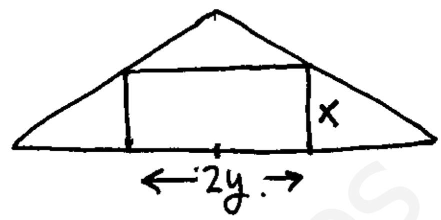


T8. Determina las dimensiones del triángulo isósceles de área máxima inscrito en una circunferencia de radio 12 cm.

T1 Observa las figuras.

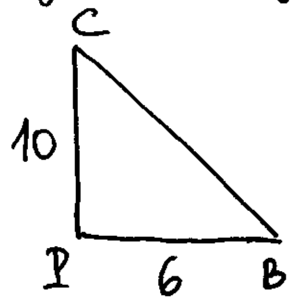


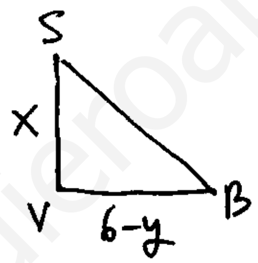
incógnitas



AC y BC lados iguales.

- ligadura: el rectángulo está inscrito en el triángulo. Observa que los triángulos $\widehat{PCB}$ y $\widehat{SVB}$ son semejantes.





$\Rightarrow$ Teorema de Tales $\dfrac{10}{x} = \dfrac{6}{6-y}$

- Función a optimizar: Área

$$A = 2yx$$

de la ligadura $x = \dfrac{10(6-y)}{6}$ $\Big\}$ $A(y) = 2y\,\dfrac{10(6-y)}{6} \Rightarrow$

$$A(y) = \frac{120y - 20y^2}{6} = \frac{60y - 10y^2}{3}$$

Derivadas: $A'(y) = \dfrac{60-20y}{3}$ $\quad A''(y) = \dfrac{-20}{3}$.

Condición de extremo $A' = 0 \rightarrow \dfrac{60-20y}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{y=3}$

$A''(3) = \dfrac{-20}{3} < 0$ Máximo.

Dimensiones : $\boxed{y=3}$

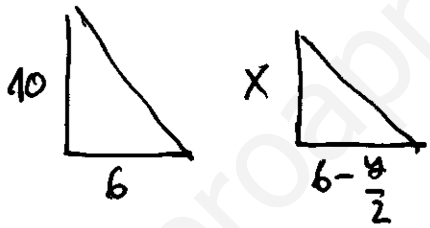
$$\frac{10}{x}=\frac{6}{6-3} \Leftrightarrow \frac{10}{x}=\frac{6}{3} \to \boxed{x=5}$$

Área máxima $A = 2\cdot 3\cdot 5 = 30 \text{ cm}^2$.

La elección de la base del rectángulo $\boxed{2y}$ en vez de $\boxed{y}$ simplifica un poco las cuentas.

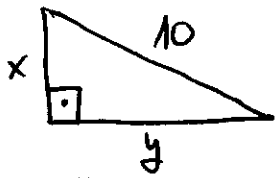
$A = x\cdot y$

ligadura



$$\boxed{\frac{10}{x}=\frac{6}{6-\frac{y}{2}}} \ldots$$

T2 Observa la figura



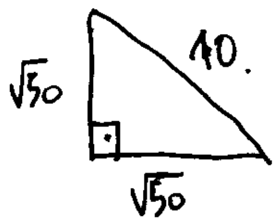
- Variables: catetos x, y.
- Ligadura: $x, y, 10$ forman un triángulo rectángulo → cumplen el teorema de Pitágoras
$$x^2+y^2=10^2.$$
- Función a optimizar: área del triángulo $f=\frac{1}{2}xy$
- Se introduce la ligadura en la función
$$y^2=100-x^2 \rightarrow y=+\sqrt{100-x^2} \rightarrow \boxed{f(x)=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{100-x^2}.}$$
$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{100x^2-x^4}.$$

Recuerda que los extremos de $\sqrt{f}$ son los de f. Por lo tanto, trabajaremos con el radicando (que seguiré llamando f)
$$f(x)=100x^2-x^4$$

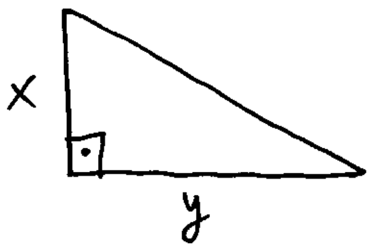
- 1ª y 2ª derivadas
$$f'(x)=200x-4x^3 \qquad f''(x)=200-12x^2.$$
- Condición de extremo:
$$f'=0 \rightarrow 200x-4x^3=0 \leftrightarrow x\cdot(200-4x^2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2=50 \rightarrow x=\pm\sqrt{50}. \end{cases}$$

0 y $-\sqrt{50}$ no tienen sentido.
$$f''(\sqrt{50})=200-12(\sqrt{50})^2<0 \rightarrow \text{máximo}.$$
- Solución:
$$x=\sqrt{50} \rightarrow y^2=100-(\sqrt{50})^2=50 \rightarrow y=\sqrt{50}$$
Área máxima $A_M=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{50}=25\ cm^2.$

Se trata de un triángulo rectángulo ISÓSCELES



T3 Observa el dibujo



- Variables: catetos (x, y)
- ligadura o restricción. $\boxed{x+y=10}$
- Función a optimizar: área del triángulo $f = \frac{1}{2} x \cdot y$
- Se introduce la ligadura en la función:

$$x = 10 - y \longrightarrow f(y) = \frac{1}{2}(10-y)\cdot y = \frac{1}{2}(10y - y^2).$$

- 1ª y 2ª derivadas:

$$f'(y) = \frac{1}{2}(10 - 2y) \qquad f''(y) = -y.$$

- Condición de extremo

$$f'(y) = 0 \rightarrow 10 - 2y = 0 \rightarrow \boxed{y=5} \quad : f''(5) = -5 < 0 \Rightarrow \text{máximo}$$

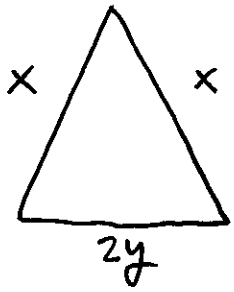
- Solución:

$y = 5u \longrightarrow x = 10 - 5 = 5u$

Área máxima (A_M) : $A_M = \frac{1}{2} 5 \cdot 5 = \frac{25}{2} u^2$

u ≡ unidades.

$\boxed{T4}$ Observa la figura

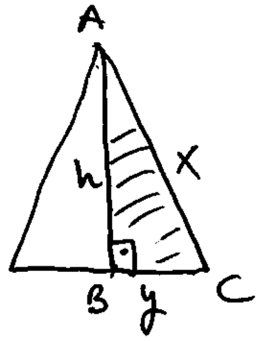


- Variables: x (lado igual), $2y$ (lado desigual).
- Ligadura $2x+2y=30$.
- Función a optimizar: área del triángulo

$$f=\frac{1}{2}\cdot 2y\cdot h$$

h = altura del lado desigual

¿Cómo relacionamos h con las variables x, y?



Teorema de Pitágoras en el triángulo $\widehat{ABC}$

$$h^2+y^2=x^2 \rightarrow h=\sqrt{x^2-y^2}.$$

(se toma el signo + pues la altura es una cantidad POSITIVA).

$$f=\frac{1}{2}2y\cdot\sqrt{x^2-y^2}=y\cdot\sqrt{x^2-y^2}.$$

- Se introduce la ligadura en la función. Observa que es más sencillo despejar la x.

$$2x+2y=30 \Longleftrightarrow x+y=15 \longrightarrow x=15-y \Rightarrow$$

$$f(y)=y\cdot\sqrt{(15-y)^2-y^2}=y\cdot\sqrt{225-30y}=\sqrt{225y^2-30y^3}.$$

$$\Rightarrow \boxed{f(y)=\sqrt{225y^2-30y^3}}$$

Se reduce el producto a un solo radical por sencillez: los extremos de $\sqrt{f}$ son los extremos de f. Trabajaremos sólo con el radicando, que seguiremos llamando f.

Función a optimizar $\boxed{f(y) = 225y^2 - 30y^3}$

- 1ª y 2ª derivada

$$f'(y) = 450y - 90y^2 \qquad f''(y) = 450 - 180y$$

- Condición de extremo

$$f' = 0 \rightarrow 450y - 90y^2 = 0 \Leftrightarrow 90y \cdot (5 - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

La solución $y = 0$ no tiene sentido (no habría triángulo)

$$f''(5) = 450 - 180 \cdot 5 < 0 \rightarrow \text{máximo.}$$

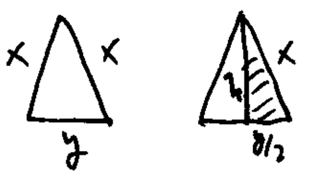
- Solución.

$$y = 5 \rightarrow x = 15 - 5 = 10 \text{ cm.}$$

$$A = y \cdot \sqrt{x^2 - y^2} \rightarrow A_M = 5 \cdot \sqrt{10^2 - 5^2} = 5 \cdot \sqrt{75} = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

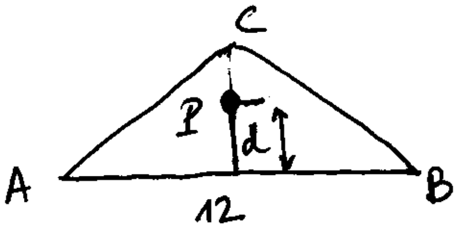
Observa que se trata de un triángulo equilátero.

Nota: es preferible elegir como lado desigual $2y$ para que quede más sencillo (sin fracciones) la relación de la altura con los lados.



$h^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = x^2 \cdot (\ldots)$

[T5] Observa la figura

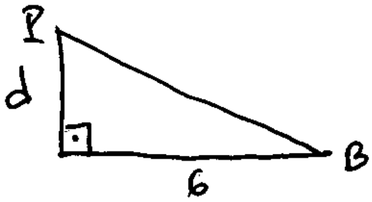


Sea P el punto buscado: queda completamente determinado por d (distancia del lado desigual a P)

d = variable

- $f = |AP| + |BP| + |CP|$. ≡ función a optimizar

$|AP| = |BP|$



$|PB| = \sqrt{6^2 + d^2} = \sqrt{36+d^2}$.

$|CP| = 5-d$.

$$\boxed{f(d) = 2\cdot\sqrt{36+d^2} + 5 - d.}$$

- 1ª y 2ª derivadas

$$f'(d) = 2\cdot\frac{2d}{2\sqrt{36+d^2}} - 1 = \frac{2d}{\sqrt{36+d^2}} - 1.$$

$$f''(d) = \frac{2\cdot\sqrt{36+d^2} - 2d\cdot\frac{\cancel{2}d}{\cancel{2}\sqrt{36+d^2}}}{(\sqrt{36+d^2})^2} = \frac{2\cdot(\sqrt{36+d^2})^2 - 2d^2}{(36+d^2)\cdot\sqrt{36+d^2}}$$

$$f''(d) = \frac{72}{(36+d^2)^{3/2}}$$

- Condición de extremo: $f' = 0 \to$

$$\frac{2d}{\sqrt{36+d^2}} - 1 = 0 \longrightarrow 2d = \sqrt{36+d^2} \Leftrightarrow (2d)^2 = \left(\sqrt{36+d^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$4d^2 = 36 + d^2 \rightarrow 3d^2 = 36 \rightarrow d^2 = 12 \Rightarrow d = \sqrt{12}$$

$f''(\sqrt{12}) > 0 \rightarrow$ mínimo.

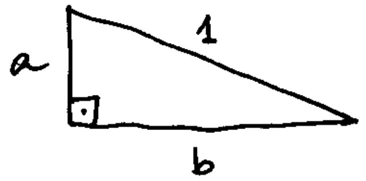
- Solución:

$$\boxed{d = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ cm.}}$$

distancia mínima $f(\sqrt{12}) = 2 \cdot \sqrt{36 + (\sqrt{12})^2} + 5 - \sqrt{12}$

$$= 2 \cdot \sqrt{48} + 5 - \sqrt{12} = 8\sqrt{3} + 5 - 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3} + 5$$

T6 Observa la figura



- Variables: catetos a y b. $(a, b > 0)$
- Restricción: teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = 1^2$
- Función a optimizar: $f = 2a + b$.
- Se introduce la ligadura (o restricción) en la función:

$$b^2 = 1 - a^2 \longrightarrow b = +\sqrt{1-a^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{f(a) = 2a + \sqrt{1-a^2}}$$

- 1ª y 2ª derivada

$$f'(a) = 2 + \frac{-\cancel{2}a}{\cancel{2}\sqrt{1-a^2}} = 2 - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

$$f''(a) = -\frac{1\cdot\sqrt{1-a^2} - a\cdot\frac{-2a}{2\sqrt{1-a^2}}}{(\sqrt{1-a^2})^2} = -\frac{2(\sqrt{1-a^2})^2 + a^2}{(1-a^2)^{3/2}} = -\frac{2-a^2}{(1-a^2)^{3/2}}$$

- Condición de extremo $f'(a) = 0 \rightarrow 2 - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = 0 \Rightarrow$

$$2\cdot\sqrt{1-a^2} = a \Leftrightarrow 4.(1-a^2) = a^2 \Longleftrightarrow 5a^2 = 4 \Rightarrow a = +\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$f''\left(\sqrt{\frac{4}{5}}\right) = -\frac{2-\frac{4}{5}}{+} < 0 \rightarrow \text{máximo. (1)}$$

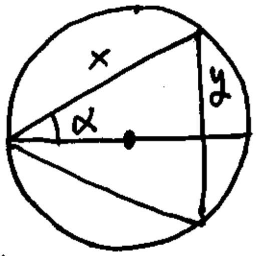
- Solución: $\boxed{a = \frac{2\sqrt{5}}{5}} \rightarrow b^2 = 1 - a^2 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \rightarrow \boxed{b = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}}$

$$f_{máx} = 2a + b = 2\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Observa:

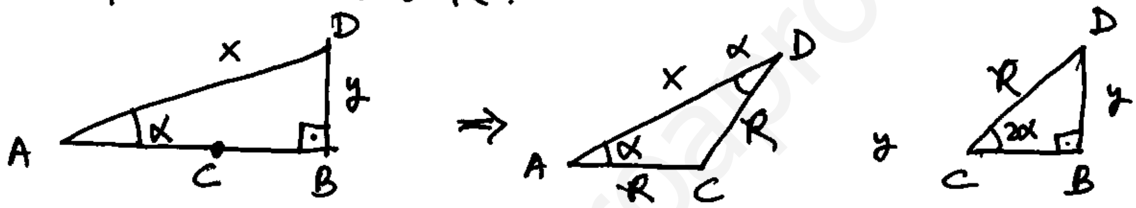
(1) el signo del denominador es siempre positivo.

T7 Observa la figura



$2\alpha \in (0, \pi/2) \Rightarrow \alpha \in (0, \pi/4)$.

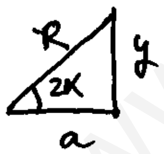
- Variables x, y, α.
- función a optimizar: $f = 2x + 2y$
- ligaduras: el triángulo es isósceles y está inscrito en una circunferencia de radio R.



en $\widehat{ADC}$ $\hat{D}$ es α por ser isósceles y $\hat{C} = \pi - \alpha$

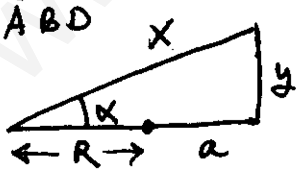
en $\widehat{CBD}$ $\hat{C}$ es 2α por ser el suplementario de $\hat{C}$ en $\widehat{ACD}$.

en $\widehat{CBD}$



$\rightarrow \operatorname{sen} 2\alpha = \dfrac{y}{R} \rightarrow y = R \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$

en $\widehat{ABD}$



$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{y}{x} \rightarrow x = \dfrac{y}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{R \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

$\Rightarrow f = 2x + 2y = 2 \cdot \dfrac{R \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + 2 \cdot R \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$

$\Rightarrow \boxed{f(\alpha) = 2R \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + 2R \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}$

Ya es una función de una sola variable: α.

Se puede simplificar mucho empleando algo de trigonometría

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\cdot \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = 2\cdot\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\boxed{f(\alpha) = 4R\cdot\cos\alpha + 2R\operatorname{sen} 2\alpha}$$

- 1^{a} y 2^{a} derivadas

$$f'(\alpha) = -4R\operatorname{sen}\alpha + 4R\cos 2\alpha$$

$$f''(\alpha) = -4R\cos\alpha - 8R\operatorname{sen} 2\alpha$$

- Condición de extremo:

$$f'(\alpha) = 0 \rightarrow -4R\operatorname{sen}\alpha + 4R\cos 2\alpha = 0 \rightarrow$$

$$\cos 2\alpha = \operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow$$

$$1 - \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}\alpha \Leftrightarrow \boxed{2\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha - 1 = 0} \rightarrow$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ 1/2 \end{cases}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = -1 \rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} \left\{ \text{imposible} \quad \alpha \in (0, \pi/4) \right\}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}} \quad \text{ó } (\pi - \pi/6 > \pi/4 \text{ imposible})$$

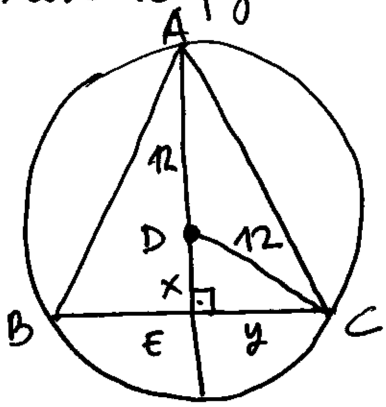
$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4R\cdot\cos\frac{\pi}{6} - 8R\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} < 0 \quad \text{pues } \cos\frac{\pi}{6} \text{ y } \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \text{ son positivos}$$

$\Rightarrow$ máximo.

Perímetro máximo: $f_M = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4R\cdot\cos\frac{\pi}{6} + 2R\cdot\operatorname{sen} 2\frac{\pi}{6} = 4R\frac{\sqrt{3}}{2} + 2R\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{f_M = 3\sqrt{3}R}$$

T8 Observa la figura



$\widehat{ABC}$: triángulo isósceles $AB = AC$

D = centro del triángulo

Variables: $DE = x$

$EC = y = EB$

(altura $h = 12 + x$

- Función a optimizar $S = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot (12+x)$ [área del triángulo $\widehat{ABC}$]
- ligadura $\widehat{DEC}$ es un triángulo rectángulo $\to$ verifica el teorema de Pitágoras.

$$x^2 + y^2 = 12^2$$

- Se introduce la ligadura en la función a optimizar:

$$y = \sqrt{144 - x^2}.$$

$$\Rightarrow S(x) = (12+x) \cdot \sqrt{144-x^2} = \sqrt{(12+x)^2 \cdot (144-x^2)}$$

RECUERDA: los extremos de $\sqrt{f}$ son los de f. $\Rightarrow$ vamos a optimizar el radicando

$$f(x) = (12+x)^2 \cdot (144 - x^2).$$

$$f'(x) = 2 \cdot (12+x) \cdot (144 - x^2) + (12+x)^2 \cdot (-2x) =$$

$$= 2 \cdot (12+x) \cdot [144 - x^2 - x(12+x)] =$$

$$\boxed{f'(x) = 2 \cdot (12+x) \cdot [144 - 12x - 2x^2]}$$

$$f''(x) = 2 \cdot [144 - 12x - 2x^2] + 2 \cdot (12+x) \cdot [-12 - 4x]$$

- Condición de extremo : $f'(x) = 0 \to$

$$2 \cdot (12+x) \cdot [144 - 12x - 2x^2] = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 12+x=0 \longrightarrow x=-12 \\ 144-12x-2x^2=0 \longrightarrow \boxed{x^2+6x-72=0} \longrightarrow \end{cases}$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot(-72)}}{2}=\frac{-6\pm 18}{2}=\begin{cases} \frac{-6+18}{2}=6 \\ \frac{-6-18}{2}=-12 \end{cases}$$

Tendremos 2 soluciones:

$x=-12 \longrightarrow$ corresponde a un triángulo de altura 0.

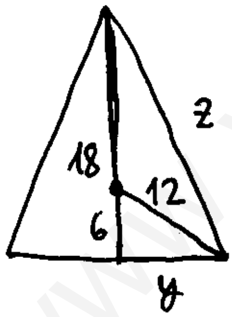
$h=12+x$

$x=6.$

$$f''(6)=2\cdot(\underbrace{144-12\cdot 6-2\cdot 6^2}_{=0})+2\cdot\underbrace{(12+6)}_{+}\cdot\underbrace{(-12-4\cdot 6)}_{-}<0$$

$\Rightarrow$ Máximo.

Veamos cuáles son las dimensiones (lados del triángulo) y área.



¿y? $y^2+6^2=12^2 \rightarrow y=\sqrt{108}$

¿z? $z^2=18^2+y^2=18^2+108 \rightarrow z=432$

$\rightarrow z=\sqrt{432}$.

lados iguales $\sqrt{432}$ cm. lado desigual $2\sqrt{108}=\sqrt{432}$.

Área

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{432}\cdot 18=9\cdot\sqrt{432}\ \text{cm}^2.$$

Observa que se trata de un triángulo equilátero.